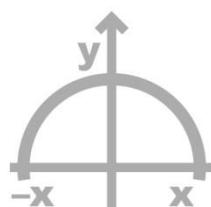


# חדוֹא לכְלָכְלִים



$$\{\sqrt{x}\}^2$$



## תוכן העניינים

1.	הפונקציה המשמשת ומבוא לתורת הקבוצות	1
2.	רענון - מבוא למכן	11 (לא ספר)
3.	פונקציות - מכון	11 (לא ספר)
4.	בעיות גידול ודעיכה - מכון	11 (לא ספר)
5.	חשיבות נגזרת של פונקציה	27
6.	חשיבות הגיאומטרית של הנגזרת - מכון	21 (לא ספר)
7.	חקירת פונקציה	38
8.	בעיות מינימום מקסימום כלכליות	38 (לא ספר)
9.	פונקציות של שני משתנים. עקומות שותת ערך. נגזרות חלקיות - מכון	31 49
10.	קיצון ללא אילוץ - מכון	31 59
11.	גירה סטומה - מכון	31 61
12.	קיצון עם אילוצים (כופלי לגרנו) - מכון	41 62
13.	פונקציות הומוגניות - מכון	51 65
14.	אינטגרלים - מכון	51 72
15.	המשך אינטגרלים - מכון	51 77
16.	פתרון מכון 11 לדוגמה	77 (לא ספר)
17.	פתרון מכון 21 לדוגמה	77 (לא ספר)
18.	פתרון מכון 31 לדוגמה	77 (לא ספר)
19.	פתרון מכון 41 לדוגמה	77 (לא ספר)
20.	פתרון מכון 51 לדוגמה	77 (לא ספר)
21.	חומר לכלכלה - פתרון מלא ל מבחנים לדוגמה מתאריך 70.9.6	70.9.6 (לא ספר)
22.	חומר לכלכלה - פתרון מלא ל מבחנים לדוגמה מתאריך 70.11.91	70.11.91 (לא ספר)
23.	חומר לכלכלה - פתרון שאלות אמריקאיות מבחינות סמסטר א 70	70 (לא ספר)

## תוכן העניינים

- |   |           |
|---|-----------|
| 24. חדי"א לכלכלהים - פתרון שאלות אמריקאיות מבחינות סמסטר ב 70 ..... | (ללא ספר) |
| 25. חדי"א לכלכלהים - פתרון שאלות אמריקאיות מבחינות ג 70-א 80 .....  | (ללא ספר) |

# חדוֹא לכלכלהים

## פרק 1 - הפונקציה הממשית ומבוא לתורת הקבוצות

### תוכן העניינים

1. פונקציה - הגדרה ותכונות בסיסיות .....	(לא ספר)
2. הפונקציה הליינרית .....	(לא ספר)
3. הפונקציה הריבועית .....	(לא ספר)
4. הפונקציה המעריכית .....	(לא ספר)
5. הפונקציה הלוגריתמית .....	(לא ספר)
6. פונקציות מפורסמות נוספות .....	(לא ספר)
7. הוצאות שיקופים מתייחסות וכיווצים של פונקציה .....	(לא ספר)
8. תחום הגדרה של פונקציה .....	1
9. הרכבת פונקציות .....	3
10. הפונקציה ההפוכה .....	6
11. פונקציה זוגית ופונקציה אי-זוגית .....	10
12. פונקציה מפוצלת .....	12
13. תרגילים משלבים .....	13
14. מבוא לתורת הקבוצות .....	17

## תחום הגדרה של פונקציה

---

### שאלות

מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

$$y = x^3 - x^2 - 4x + 1 \quad (1)$$

$$y = \frac{1}{x^2 - 4} \quad (2)$$

$$y = \frac{4x + 1}{x^2 + 1} \quad (3)$$

$$y = \frac{1}{x^3 - x} \quad (4)$$

$$y = \frac{x^2}{x^2 - x - 2} \quad (5)$$

$$y = \sqrt{x - 4} \quad (6)$$

$$y = \sqrt{x^2 + x - 2} \quad (7)$$

$$y = \sqrt[3]{x^2 + x - 1} \quad (8)$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{1 - |x|}} \quad (9)$$

$$y = \ln(x^2 + x - 2) \quad (10)$$

$$y = \log x + \frac{1}{\log x} \quad (11)$$

$$y = e^{x^2 + x + 1} \quad (12)$$

$$y = \log_x(x+4) \quad (13)$$

### תשובות סופיות

(1) כל  $x$ .

(2)  $x \neq \pm 2$

(3) כל  $x$ .

(4)  $x \neq 0, 1, -1$

(5)  $x \neq 2, -1$

(6)  $x \geq 4$

(7)  $x \leq -2, x \geq 1$

(8) כל  $x$ .

(9)  $-1 < x < 1$

(10)  $x < -2, x > 1$

(11)  $x > 0, x \neq 1$

(12) כל  $x$ .

(13)  $x > 0, x \neq 1$

## הרכבת פונקציות

### שאלות

**1)** נתונות הפונקציות המורכבות הבאות:  
 $. h(x) = \frac{4}{x}$ ,  $g(x) = x^2$ ,  $f(x) = x - 4$

חשבו את הפונקציות המורכבות הבאות:

$f(g(x))$

$h(g(f(5)))$

$f(g(1))$

$h(h(x))$

$f(f(x))$

$h(f(x))$

**2)** נתון  $f(x) = \frac{x-2}{x-1}$

חשבו את  $f(f(x))$

**3)** נתון  $f(x) = \frac{x-3}{x+2}$ ,  $g(x) = \frac{5-x}{x-7}$

חשבו את  $f(g(x)) + g(f(x))$

**4)** נתון  $f(x) = x^2 - 7x$ ,  $g(x) = \ln x$

חשבו את  $f(g(x))$

**5)** נתון  $f(x) = e^{2x}$ ,  $g(x) = \ln x$

חשבו את  $f(g(x))$

**6)** נתון  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x > 0 \\ x^2 & x \leq 0 \end{cases}$ ,  $g(x) = \begin{cases} x+3 & x > 4 \\ 3x & x \leq 4 \end{cases}$

חשבו את  $f(g(x)), g(f(x))$

**7)** נתונות הפונקציות

$. f(x) = \begin{cases} 2x+4 & x \leq -1 \\ \sqrt{x+1} & x > -1 \end{cases}$  ו  $g(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & x < 1 \\ -x^2 - 2x - 1 & x \geq 1 \end{cases}$

מצאו נוסחה עבור הרכיבה  $z(x) = g(f(x))$

**(8) נתונות הפונקציות**

$$\cdot f(x) = \begin{cases} 2x+4 & x \leq -1 \\ \sqrt{x+1} & x > -1 \end{cases}$$

$$\cdot g(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & x < 1 \\ -x^2 - 2x - 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

a. מצאו נוסחה עבור הרכבה  $h(x) = f(g(x))$

b. נתון ש-  $n \in \mathbb{Z}$  ו-  $h(n) \notin \mathbb{Z}$ .

מה ניתן להסיק בודדות?

$n \leq -3$ . 1

$n \geq 1$ . 2

3.  $n$  אי-זוגי שלילי.

4. אף תשובה אינה נכונה.

**(9) נתון**  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

מצאו את  $f^n(x) = \underbrace{f(f(f(\dots(f(x)))))}_{n \text{ Times}}$

**תשובות סופיות**

$x. 1 \quad x - 8 . 2 \quad \frac{4}{x-4} . 3 \quad x^2 - 4 . 5 \quad \text{ב. } 4 \quad -3 . 1$

3 (2)

69/13 (3)

-10 (4)

4 (5)

$$f(g(x)) = \begin{cases} \frac{1}{x+3} & x > 4 \\ \frac{1}{3x} & 0 < x \leq 4 \\ (3x)^2 & x \leq 0 \end{cases}, g(f(x)) = \begin{cases} x^2 + 3 & x < 2 \\ 3x^2 & -2 \leq x \leq 0 \\ \frac{1}{x} + 3 & 0 < x < \frac{1}{4} \\ 3\frac{1}{x} & x \geq \frac{1}{4} \end{cases} \quad (6)$$

$$z(x) = \begin{cases} 4x^2 + 16x + 12 & x < -1.5 \\ -4x^2 - 20x - 25 & -1.5 \leq x \leq -1 \\ x - 3 & -1 < x < 0 \\ -x - 2 - 2\sqrt{x+1} & x \geq 0 \end{cases} \quad (7)$$

$$n \leq -3 . \text{ ב. } h(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 3} & x < -\sqrt{3} \\ 2x^2 - 4 & -\sqrt{3} \leq x < 1 . \text{ נ.} \\ -2x^2 - 4x + 2 & x \geq 1 \end{cases} \quad (8)$$

$f^n(x) = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}} \quad (9)$

## הפונקציה ההפוכה

### שאלות

**בשאלות 1-4** הוכיחו שהפונקציה הנתונה היא חד"ע בתחום הגדרתה ומצאו את הפונקציה ההפוכה לה. בנוסף, מצאו את התמונה של הפונקציה.

$$f(x) = \frac{x+1}{x} \quad (2)$$

$$f(x) = \frac{x-1}{3} \quad (1)$$

$$(x \geq 0) \quad f(x) = x^2 - 4 \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{3x-2}{x-2} \quad (3)$$

**בשאלות 5-7**, בדקו האם הפונקציה היא חד"ע. בנוסף, מצאו את התמונה של הפונקציה:

$$f(x) = \sqrt{1-x^2} \quad (7)$$

$$f(x) = x^2 - x \quad (6)$$

$$f(x) = x + \frac{1}{x} \quad (5)$$

**בשאלות 8-10**, בדקו האם הפונקציה היא חד"ע, אם כן, מצאו את הפונקציה ההפוכה ואת התמונה של הפונקציה.

$$f(x) = \left( \frac{2x-1}{2x+1} \right)^3 \quad (10)$$

$$y = \frac{x^2+3}{2x-1} \quad (9)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \quad (8)$$

$$\text{. } f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x-1}} \quad (11) \text{ נתונה}$$

האם הפונקציה היא חד"ע?  
מצאו את התמונה של הפונקציה.

**12)** עברו כל אחת מהפונקציות הבאות, מצאו את תחום ההגדרה, הטעווח וה悍מונה  
וקבעו האם היא פונקציה על:

$$f(x) = \frac{x-1}{3} ; f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ . א.}$$

$$f(x) = \frac{x+1}{x} ; f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \text{ . ב.}$$

$$f(x) = \frac{3x-2}{x-2} ; f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{3\} \text{ . ג.}$$

$$f(x) = x^2 - 4 ; f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} \text{ . ד.}$$

**13)** עבור כל אחת מהפונקציות הבאות מצאו תחום הגדרה, טווח ותמונה.  
בנוסף, קבעו האם הפונקציה הנתונה היא על.

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1} \quad f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{א.}$$

$$g(x) = \frac{1}{x^2 + 1} \quad f : \mathbb{R} \rightarrow (0, 1] \quad \text{ב.}$$

$$h(x) = \frac{1}{x^2 + 1} \quad f : (1, \infty) \rightarrow (0, 1] \quad \text{ג.}$$

**14)** תהיינה שתי פונקציות  $f : A \rightarrow B$ ,  $g : B \rightarrow C$ .

תהי  $h(x) = g(f(x))$  הרכבה, המוגדרת על ידי  
הוכיחו או הפריכו:

- א. אם  $f$  ו-  $g$  חח"ע אז  $h$  חח"ע.
- ב. אם  $f$  ו-  $g$  חח"ע אז  $h$  על.
- ג. אם  $f$  ו-  $g$  על אז  $h$  על.
- ד. אם  $f$  ו-  $g$  על אז  $h$  חח"ע.
- ה. אם  $f$  חח"ע ו-  $g$  על אז  $h$  חח"ע.
- ו. אם  $f$  חח"ע ו-  $g$  על אז  $h$  על.
- ז. אם  $f$  על ו-  $g$  חח"ע אז  $h$  חח"ע.
- ח. אם  $f$  על ו-  $g$  חח"ע אז  $h$  על.

**15)** תהיינה שתי פונקציות  $f : A \rightarrow B$ ,  $g : B \rightarrow C$ .

תהי  $h(x) = g(f(x))$  הרכבה, המוגדרת על ידי  
נתון כי  $h$  על.  
הוכיחו או הפריכו:

- א.  $f$  חח"ע.
- ב.  $f$  על.
- ג.  $g$  חח"ע.
- ד.  $g$  על.

.  $f : A \rightarrow B$ ,  $g : B \rightarrow C \rightarrow$

.  $h(x) = g(f(x))$  הרכבה, המוגדרת על ידי

נתון כי  $h$  חח"ע.

הוכיחו או הפריכו:

- א.  $g$  על.
- ב.  $f$  על.
- ג.  $g$  חח"ע.
- ד.  $f$  חח"ע.

### תשובות סופיות

.  $y$ ,  $f^{-1}(x) = 3x + 1$  (1)

.  $y \neq 1$ ,  $f^{-1}(x) = \frac{1}{x-1}$  (2)

$f^{-1}(x) = \frac{2x-2}{x-3}$ ,  $y \neq 3$  (3)

$f^{-1}(x) = \sqrt{x+4}$ ,  $y \geq -4$  (4)

5) לא חח"ע. תמונה:  $y \geq 2$  או  $y \leq -2$ .

6) לא חח"ע. תמונה:  $y \geq -\frac{1}{4}$

7) לא חח"ע. תמונה:  $0 \leq y \leq 1$

8) כן חח"ע. תמונה:  $0 > y$ . פונקציה הפוכה:  $x > 0$

9) לא חח"ע. תמונה:  $y \geq 2.3$  או  $y \leq -1.3$

10) כן חח"ע. תמונה:  $1 \neq y$ . פונקציה הפוכה:

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{1-\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{2}$$

11) לא חח"ע. תמונה:  $y \geq \frac{6}{\sqrt{3}}$

12) א. תחום הגדרה, טווח ותמונה:  $\mathbb{R}$ ; על.

ב. תחום הגדרה  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , טווח  $\mathbb{R}$ , תמונה:  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ; לא על.

ג. תחום הגדרה  $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ , טווח ותמונה:  $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ ; על.

ד. תחום הגדרה  $(-\infty, 0]$ , טווח  $\mathbb{R}$ , תמונה:  $(-\infty, 0]$ ; לא על.

13) א. תחום הגדרה וטווח:  $\mathbb{R}$ , תמונה:  $(0, 1]$ ; לא על.

ב. תחום הגדרה  $\mathbb{R}$ , טווח ותמונה:  $(0, 1]$ ; על.

ג. תחום הגדרה  $(1, \infty)$ , טווח  $[0, 0.5)$ , תמונה:  $(0, 0.5)$ ; לא על.

14) שאלת הוכחה.

15) שאלת הוכחה.

16) שאלת הוכחה.

## פונקציה זוגית ואי-זוגית

### שאלות

מצאו איזה מבין הפונקציות בשאלות 1-6 הן אי-זוגיות או איזה זוגיות:

$$y = 1 \quad (3)$$

$$y = x^4 + x^{10} \quad (2)$$

$$y = 4x^3 \quad (1)$$

$$y = \ln x + x^2 \quad (6)$$

$$y = 2^x \quad (5)$$

$$y = \frac{1}{x} \quad (4)$$

7) נתונה פונקציה אי-זוגית  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  
 ונסמן  $k(x) = -f(x)$ ,  $z(x) = f(x^2)$ .  
 בדקו, עבור כל אחת מהפונקציות  $z$ ,  $k$ , האם היא זוגית או אי-זוגית.

8) נתונה פונקציה אי-זוגית  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , פונקציה זוגית  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  
 ונסמן  $z(x) = -f(x^3)$  ו-  $k(x) = -g(x^3)$ .  
 טענה א':  $z(x)$  אי-זוגית.  
 טענה ב':  $k(x)$  אי-זוגית.  
 איזו טענה נכונה?

9) נתונה פונקציה אי-זוגית  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , פונקציה זוגית  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  
 ונסמן  $z(x) = -g(-4x) \cdot f(x^4)$ ,  $k(x) = f(-x) + x^{11}g(x)$ .  
 בדקו, עבור כל אחת מהפונקציות  $z$ ,  $k$ , האם היא זוגית או אי-זוגית.

10) הוכיחו כי:

- א. סכום פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית
- ב. מכפלת פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית.
- ג. מנת פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית.
- ד. הרכבה של פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית.
- ה. הרכבה של פונקציות אי-זוגיות היא פונקציה אי-זוגית.

**תשובות סופיות**

שאלות 1-6: זוגיות : 3,2,3 ; אי-זוגיות : 1,4,5 . כללית : 6.

7) k אי-זוגית, z זוגית.

8) טענה ב'.

9) k אי-זוגית, z זוגית.

10) שאלת הוכחה.

## פונקציה מפוצלת

### שאלות

רשמו כל אחת מהפונקציות **1-4** כפונקציה מפוצלת וشرطו את גраф הפונקציה :

$$y = 3|x+1| \quad (2)$$

$$y = |x-2| \quad (1)$$

$$y = \frac{|x|}{x} \quad (4)$$

$$y = x^2 + 2|x-1| \quad (3)$$

$$(5) \text{ נתונה הפונקציה } f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \leq x \leq 4 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

- . a. חשבו  $f(1), f(4), f(-4), f(0), f(7)$ .
- . b. שרטטו את גראף הפונקציה.
- . c. בדקו האם הפונקציה זוגית, אי-זוגית או כללית.

### תשובות סופיות

$$y = \begin{cases} 3x+3 & x \geq -1 \\ -3x-3 & x < -1 \end{cases} \quad (2)$$

$$y = \begin{cases} x-2 & x \geq 2 \\ 2-x & x < 2 \end{cases} \quad (1)$$

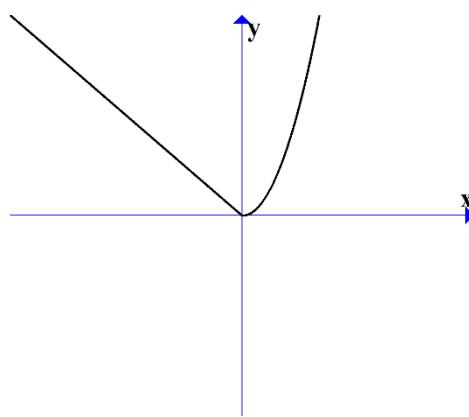
$$y = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \quad (4)$$

$$y = \begin{cases} x^2 + 2x - 2 & x \geq 1 \\ x^2 - 2x + 2 & x < 1 \end{cases} \quad (3)$$

$$(5) \text{ a. } f(1)=1, f(4)=16, f(-4)=4, f(0)=0, f(7)=\text{undefined}$$

ג. כללית.

ב.



## תרגילים משלבים

### שאלות

$$1) \text{ נתונה הפונקציה } f(x) = \begin{cases} x+1 & x > 1 \\ x^3 + 1 & -1 \leq x \leq 1 \\ x+1 & x < -1 \end{cases}$$

שרטטו את הפונקציה, וקבעו האם היא :

- א. עולה.
- ב. יורדת.
- ג. אי-זוגית.
- ד. זוגית.
- ה. חסומה.
- ו. לא חסומה.
- ז. חח"ע.
- ח. על  $\mathbb{R}$ .

הערה : ניתן להתבסס על הציור כנימוק.

$$2) \text{ נתונה הפונקציה } f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x} & x > 1 \\ x^5 + 1 & -1 \leq x \leq 1 \\ x+1 & x < -1 \end{cases}$$

בכל אחד מהסעיפים הבאים יש טענה.

קבעו האם הטענה נכונה או לא נכונה.

- א. הפונקציה מונוטונית עולה ממש.
- ב. הפונקציה על  $\mathbb{R}$ .
- ג. הפונקציה אי-זוגית.
- ד. הפונקציה הזוגית.
- ה. הפונקציה חח"ע.

הערה : ניתן לשרטט ולהתבסס על הציור כנימוק.

(3) נתונה פונקציה  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , זוגית ומונוטונית עולה ממש, ופונקציה  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , אי-זוגית ומונוטונית יורדת ממש.

$$\text{נסמן: } k(x) = -f(x^3) \text{ ו- } z(x) = -g(x^3).$$

טענה א':  $k(x)$  מונוטונית עולה ממש.

טענה ב':  $z(x)$  מונוטונית עולה ממש.

טענה ג':  $h(x) = k(z(x))$  זוגית.

מי מבין הטענות נכונה?

(4) נתונות שתי פונקציות,  $f, g : [0,1] \rightarrow [0,1]$ .

נתון ש-  $f$  מונוטונית עולה ממש, ואילו  $g$  מונוטונית יורדת חלש, אך אינה יורדת ממש.

$$\text{תהי } h(x) = f(g(x)).$$

אייזו טענה נכונה?

א.  $h$  יורדת חלש.

ב.  $h$  עולה ממש.

ג.  $h$  עולה חלש, אך אינה עולה ממש.

ד.  $h$  אינה חסומה בהכרח.

(5) נתונות הפונקציות  $f(x) = \begin{cases} x+4 & x \leq 0 \\ \sqrt{x} & x > 0 \end{cases}$  ו-  $g(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & x < 0 \\ -x^2 - 2x - 1 & x \geq 0 \end{cases}$

$$\text{תהי } h(x) = f(g(x)).$$

א. מצאו את  $h$  בקטע  $[-2, 0]$ .

ב. קבעו האם  $h$  חח"ע בקטע  $[-2, 0]$ .

ג. קבעו האם  $h$  חסומה בקטע  $[-2, 0]$ .

ד. קבעו האם  $[0, 4] \rightarrow [-2, 0]$  היא על.

\* בסעיפים ב-ד ניתן להסתמך על גרף הפונקציה.

(6) נתונות פונקציות המוגדרות על כל  $\mathbb{R}$ :  $f(x) = x^3$ ,  $g(x) = (-1)^{\lfloor x \rfloor}$ .

קבעו מי מבין הטענות הבאות נכונה.

הפונקציה  $h(x) = f(g(x))$  היא:

א. חסומה.

ב. אי-זוגית.

ג. חח"ע.

ד. מונוטונית.

7) נתונות פונקציות המוגדרות על כל  $\mathbb{R}$  .  
 $f(x) = x^3$ ,  $g(x) = -\lfloor x \rfloor$

א. בדקו את מונוטוניות  $z(x) = f(g(x))$ .

ב. בדקו את מונוטוניות  $k(x) = g(f(x))$ .

ג. בדקו האם  $h(x) = \sqrt[3]{f(x)} - g(-x)$  חסומה.

תזכורת לסעיפים א+ב :

אם  $f(a) \geq f(b) \Leftrightarrow a < b$  אז הפונקציה  $f$  יורדת חלש.

8) נתונות פונקציות המוגדרות על כל  $\mathbb{R}$  .  
 $f(x) = (3\lfloor x \rfloor)^3 + 27\lfloor x \rfloor$   
 $g(x) = f(x) + x^3 - 28$

הוכיחו או הפריכו :

א. הפונקציה  $f$  עולה ממש וחח"ע.

ב. הפונקציה  $g$  עולה ממש וחח"ע.

9) מצאו את הפונקציה ההפוכה לפונקציה  $f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

קבעו את תחום הגדרתה והוכיחו שהפונקציה על  $\mathbb{R}$ .

הערה : פונקציה זו נקראת סינוס היפרבולי.

10) חקרו את מונוטוניות הפונקציה  $f(x) = \frac{2x+3}{3x-1}$

הערה : אין להשתמש בנזירות.

11) נתונה הפונקציה  $f(x) = \sqrt{2+x-x^2}$

א. מצאו את תחום הגדרה של הפונקציה.

ב. מצאו את התמונה של הפונקציה.

ג. הוכיחו שהפונקציה חסומה.

ד. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

### תשובות סופיות

- 1) א. כן.    ב. לא.    ג. לא.    ד. לא.    ה. לא.    ו. כן.
- 2) אף טענה אינה נכונה.
- 3) טענה ב' נכונה.
- 4) טענה א' נכונה.
- 5) א.  $h(x) = x^2$   
 ב. הפונקציה חח"ע בקטע.  
 ד. הפונקציה לא על.
- 6) א. הפונקציה חסומה.  
 ב. הפונקציה לא זוגית ולא אי-זוגית.  
 ד. הפונקציה לא מונוטונית.
- 7) א. הפונקציה  $(x)^z$  יורדת חלש.  
 ב. הפונקציה  $(x)^k$  יורדת חלש.  
 ג. הפונקציה חסומה.
- 8) שאלת הוכחה.
- 9)  $f^{-1}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$  ; תחום הגדרתה: כל  $x$ .
- 10) ראו באתר.
- 11) א.  $-1 \leq x \leq 2$   
 ב.  $0 \leq y \leq \frac{3}{2}$   
 ג. שאלת הוכחה.  
 ד.  $\frac{1}{2} < x \leq 2$  – עלייה,  $-1 \leq x < \frac{1}{2}$  – ירידת.

## מבוא לתורת הקבוצות

### סיכום כללי

#### הגדרות יסודיות

- גדרה חד-כיוונית  $\Rightarrow$ .  $A \Rightarrow B$  פירושו: אם  $A$  מתקיים, אז גם  $B$  מתקיים.
- גדרה דו-כיוונית  $\Leftrightarrow$  (אם ורק אם).  $A \Leftrightarrow B$  פירושו:  $A \Rightarrow B$  וגם  $B \Rightarrow A$ .
- הסימן 'או'  $\vee$ .
- הסימן 'וגם'  $\wedge$ .

#### קבוצה, איבר של קבוצה ושיעיות לקבוצה

- קבוצה היא אוסף של עצמים.
- כל עצם בקבוצה נקרא איבר של הקבוצה.
- שיעיות לקבוצה:
  - על מנת לציין שהאיבר  $a$  שייך לקבוצה  $A$  נדרש  $a \in A$ .
  - על מנת לציין שהאיבר  $a$  אינו שייך לקבוצה  $A$  נדרש  $a \notin A$ .

#### שווין בין קבוצות

- שתי קבוצות הן שוות אם יש להן בדיקת אותן איברים.
- פורמלית שווין בין קבוצות מוגדר באופן הבא:  $A = B \Leftrightarrow (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$

#### הקבוצה ריקה

קבוצה שאין בה כלל איברים נקראת הקבוצה הריקה ומסומנת ב-  $\emptyset$ , כלומר  $\{\} = \emptyset$ .

#### קבוצה סופית ואיינסופית

- קבוצה תקרא סופית אם מספר האיברים בה סופי.
- קבוצה תקרא איינסופית אם מספר האיברים בה איינסופי.

### עוצמה של קבוצה

מספר האיברים של קבוצה  $A$  נקרא גם העוצמה של הקבוצה ומסומן  $|A|$ .

### תת-קבוצה

אם קבוצה  $A$  מוכלת בקבוצה  $B$ , נסמן  $A \subseteq B$ .

תמיד מתקיימים :

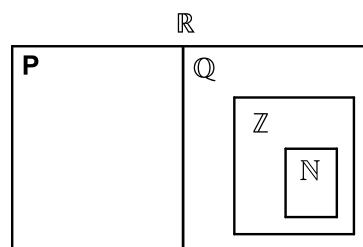
$$A \subseteq A \quad \bullet$$

$$\emptyset \subseteq A \quad \bullet$$

.  $A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$  או  $A = B \Leftrightarrow (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$  עבור שוויון קבוצות נדרוש

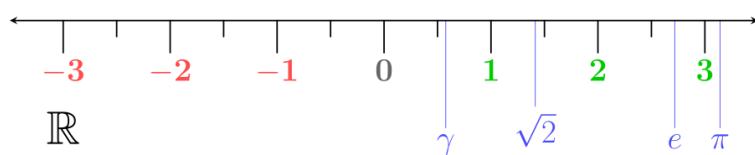
### קבוצות מספרים מיוחדות

- קבוצת המספרים הטבעיים :  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$
- קבוצת המספרים השלמים :  $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots\}$
- קבוצת המספרים הרציונאליים :  $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$
- קבוצת המספרים הא-רציונאליים (אין סימון ספציפי לקבוצה זו, למעט  $\mathbb{P}$ ).
- קבוצת המספרים ממשיים :  $\mathbb{R}$  (כוללת את  $\mathbb{Q}$  ואת  $\mathbb{P}$ ).



### ציר המספרים

את קבוצת כל המספרים ממשיים ניתן לתאר על ידי הישר המשיש  
שהוא הישר שנקודותיו הן המספרים ממשיים :



### קטועים על ציר המספרים

סימנון קטועים	סימנון קבוצות	תיאור מילולי
$(a, b)$	$\{x \mid a < x < b\}$	הקטע הפתוח מ- $a$ ל- $b$ לא כולל נקודות הנקה
$[a, b]$	$\{x \mid a \leq x \leq b\}$	הקטע הסגור מ- $a$ ל- $b$ כולל נקודות קצה
$[a, b)$	$\{x \mid a \leq x < b\}$	קטע חצי סגור וחצי פתוח, מכיל את $a$ ולא את $b$
$(a, b]$	$\{x \mid a < x \leq b\}$	קטע חצי סגור וחצי פתוח, מכיל את $b$ ולא את $a$
$(a, \infty)$	$\{x \mid a < x < \infty\}$	הקרן הפתוחה מ- $a$ עד $\infty$ לא $a$
$[a, \infty)$	$\{x \mid a \leq x < \infty\}$	הקרן הסגורה מ- $a$ עד $\infty$ כולל $a$
$(-\infty, b)$	$\{x \mid -\infty < x < b\}$	הקרן הפתוחה מ- $-\infty$ עד $b$ לא $b$
$(-\infty, b]$	$\{x \mid -\infty < x \leq b\}$	הקרן הסגורה מ- $-\infty$ עד $b$ כולל $b$

### קבוצת החזקה של קבוצה נתונה

קבוצת כל תת-הקבוצות של  $A$ , נקראת קבוצת החזקה של  $A$ , ומסומנת  $P(A)$ .

### איחוד וחיתוך קבוצות

- איחוד קבוצות  $A$  ו-  $B$  פירושו הגדרת קבוצה חדשה שמכילה את כל האיברים של הקבוצות עצמן ומסומנת  $A \cup B$ .
- חיתוך קבוצות  $A$  ו-  $B$  פירושו הגדרת קבוצה חדשה שמכילה את האיברים המשותפים של הקבוצות עצמן ומסומנת  $A \cap B$ .

תכונות החיתוך	תכונות האיחוד
$A \cap B = B \cap A$	$A \cup B = B \cup A$
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
$A \cap A = A$	$A \cup A = A$
$A \cap \emptyset = \emptyset$	$A \cup \emptyset = A$
	$A \subseteq A \cup B$

הדיםטריבוטיביות של החיתוך מעל האיחוד ושל האיחוד מעל החיתוך :

$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{aligned}$$

### הפרש קבוצות

ההפרש של שתי קבוצות  $A$  ו-  $B$ , המסומן  $A - B$ , הוא קבוצה שאיבריה הם כל איברי  $A$  שאינם איברי  $B$ , כלומר  $A - B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$ .

### משלים של קבוצה

ההפרש  $A - U$  מסומן ב-  $A^c$  או ב- '  $A$  ונקרא **המשלים של  $A$** , כאשר  $U$  היא הקבוצה האוניברסלית.

### כלי זה-מורגן

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \quad \bullet$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c \quad \bullet$$

### דיאגרמת ווּן

תיאור גרפי של קבוצות והיחסים ביניהן.

## שאלות

**1)** רשמו את הטענות הבאות במילים ובדקו האם הן נכונות:

א.  $\forall x \forall y : (x+y)^2 > 0$

ב.  $\forall x \exists y : (x+y)^2 > 0$

ג.  $\forall x \forall y \exists z : xz = \frac{y}{4}$

ד.  $\forall x > 0, \forall y > 0, \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$

ה.  $\forall n \exists k, n^3 - n = 6k$  ( $k$  ו- $n$  טבעיות).

**2)** רשמו כל אחת מהטענות הבאות בסימנים לוגיים:

א. פתרוון איהשוין  $x^2 > 4$ , הוא  $x > 2$  או  $x < -2$ .

ב. אי השוויון  $x^2 + 4 > 0$ , מתקיים לכל  $x$ .

ג. לכל מספר טבעי  $n$ , המספר  $n^3 - n$  מחלק ב-6.

ד. עבור כל מספר  $x$ ,  $|x| < 1$  אם ורק אם  $-1 < x < 1$ .

**3)** רשמו במפורש את הקבוצות הבאות על ידי צומדיים או באמצעות קטעים,

ואת מספר איברי הקבוצה:

א.  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 16\}$

ב.  $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 < 16\}$

ג.  $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 < 16\}$

ד.  $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid (x+4)(x-1) < 0\}$

ה.  $E = \{x \in \mathbb{N} \mid x^3 + x^2 - 2x = 0\}$

ו.  $F = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 4\}$

**4)** הגדרו את הקבוצות הבאות על ידי פירוט כל איבריהן או על ידי רישום

בצורה:  $\{x \mid$  מקיים תכונה מסוימת  $\}$ .  $A = \{x \mid$

א. קבוצת המספרים השלמים החזוביים האיזוגיים.

ב. קבוצת המספרים הראשוניים בין 10 ל-20.

ג. קבוצת הנקודות במישור הנמצאות על מעגל שמרכזו בראשית ורדיוסו 4.

ד. קבוצת ריבועי המספרים 1, 2, 3, 4.

5) ציינו אילו מן הקבוצות הבאות שוות זו לזו :

א.  $A = \{11, 13, 17, 19\}$

ב.  $B = \{x \mid 10 < x < 20, x \text{ מספר ראשוני}\}$

ג.  $C = \{11, 11, 17, 13, 19\}$

ד.  $D = \{x \mid x = 4k, k \in \mathbb{Z}\}$

ה.  $E = \{x \mid x = 2m, m \text{ שלם זוגי}\}$ .

6) נתונה הקבוצה  $. A = \{1, 2, \{2\}, \{2, 5\}, 4, \{2, 4\}\}$  מי מבין הטענות הבאות נכונה :

א.  $\{2\} \in A$

ב.  $2 \in A$

ג.  $5 \in A$

ד.  $\emptyset \in A$

ה.  $\{\{2\}\} \subseteq A$

ט.  $\{2\} \subseteq A$

ט.  $\{2, 4\} \subseteq A$

ח.  $\{2, \{2\}\} \subseteq A$

ז.  $\emptyset \subseteq A$

יב.  $\{2, 5\} \subseteq A$

יא.  $\{\{2, 4\}\} \in A$

ז.  $\{2, 4\} \in A$

יד.  $\{1, 4\} \in A$

יג.  $\{2, 5\} \in A$

7) מצאו שתי קבוצות,  $A$  ו- $B$ , המקיימות :

א.  $A \in B$

ב.  $A \subseteq B$

8) נתונות הקבוצות הבאות :

$A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  ,  $B = \{4, 6, 8, 10\}$  ,  $C = \{3, 5, 7, 9\}$  ,  $D = \{6, 7, 8\}$  ,  $E = \{7, 8\}$

קבעו איזה מבין הקבוצות לעיל יכולה להיות הקבוצה  $X$  :

א.  $X \not\subseteq D$  וגם  $X \subseteq A$

ב.  $X \not\subseteq C$  וגם  $X \subseteq D$

ג.  $X \not\subseteq A$  וגם  $X \subseteq E$

9) הוכיחו :  $. A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$

**10)** נתונות הקבוצות הבאות :

$$A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, B = \{4, 6, 8, 10\}, C = \{3, 5, 7, 9\}, D = \{6, 7, 8\}$$

רשמו את :

ג.  $(A \cup B) \cap C$

ב.  $A \cap B$

א.  $A \cup B$

ד.  $(B \cap C) \cup (B \cap D)$  ה.  $(B \cup C) \cap (B \cup D)$

**11)** נתונות הקבוצות הבאות :

$$A = [1, 4), B = (-2, 1), C = \{x \in R \mid 0 \leq x \leq 4\}, D = \{x \mid 2^x = 0\}$$

רשמו את :

ג.  $(A \cup B) \cap C$

ב.  $A \cap B$

א.  $A \cup B$

ד.  $(B \cap C) \cup (B \cap D)$  ה.  $(B \cup C) \cap (B \cup D)$

**12)** נתונות 3 קבוצות :

$$A = \{4, 5, 6, 7, 8\}, B = \{5, 6, 7, 8, 9\}, C = \{4, 5, 6, 10\}$$

א. חשבו את  $(A - B) - C$ ב. חשבו את  $A - (B - C)$ **13)** נתון :  $U = \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18\}, A = \{12, 15, 18\}, B = \{13, 15, 17\}$ 

הציגו את כלל זה מORGAN

**14)** הוכיחו את כלל זה מORGAN הראשון**15)** מצאו את הקבוצה המשלימה, ביחס ל- $\mathbb{R}$ , של הקבוצות הבאות :

א.  $A = [1, \infty)$

ב.  $B = (-\infty, 1) \cup (4, \infty)$

ג.  $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 5x + 4 > 0\}$

ד.  $D = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 1| < 2 \vee x > 4\}$

**16)** הציגו באמצעות דיאגרמת ווֹן את הקבוצות הבאות :

ב.  $A \cup B$

א.  $A \cap B$

ד.  $A \cap B^c$

ג.  $A^c$

ו.  $A \cup B^c$

ח.  $A^c \cap B$

ט.  $A^c \cup B^c = (A \cap B)^c$

ז.  $A^c \cup B$

ט.  $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$

**17)** ענו על השעיפים הבאים :

א. הוכחו כי  $A \setminus B = A \cap B^c$

הראו זאת גם בעזרת דיאגרמת ווֹן.

ב. נסמן :  $X = C \setminus (A \cap B)$ ,  $Y = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$

הוכחו כי  $X = Y$

ג. נסמן :  $X = A \setminus (B \cup C)$ ,  $Y = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

הוכחו כי  $Y = X$ .

**18)** תהינה  $X, Y, Z$  קבוצות כלשהן.

טענה א':  $X \cap Y \cap Z = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus Z) \cup (Z \setminus X)$

טענה ב':  $((X \cap Y) \cup Z)^c = (X^c \cup Y^c) \cap Z^c$

טענה ג':  $X \setminus (Y \setminus Z) = (X \setminus Y) \cup Z$

אייזו טענה נכונה לכל בחירה של  $X, Y, Z$  ?

**19)** נתונה הקבוצה  $A = \{\phi, 4, \{4\}\}$ .

רשמו את  $P(A)$

**20)** הוכחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית :

א. לכל קבוצה  $A$  מתקיים  $A \subseteq P(A)$

ב. לכל קבוצה  $A$  מתקיים  $A \not\subseteq P(A)$

**21)** הוכחו כי :  $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \subseteq P(B)$

**תשובות סופיות**

**1)** א. לכל  $x$  ולכל  $y$  מתקיים  $(x+y)^2 > 0$ . הטענה אינה נכונה.

ב. לכל  $x$  קיים  $y$ , כך ש- $0 > (x+y)^2$ . הטענה אינה נכונה.

ג. לכל  $x$  ולכל  $y$  קיים  $z$  כך ש- $\frac{y}{4} = xz$ . הטענה אינה נכונה.

ד. לכל  $x$  חיובי ולכל  $y$  חיובי מתקיים  $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$ . הטענה נכונה.

ה. לכל  $n$  טבעי המספר  $n^3 - n$  מתחלק ב-6. הטענה נכונה.

$$\forall x: x^2 + 4 > 0 \Rightarrow x > 2 \vee x < -2 \quad \text{ב. } 0 > x^2 > 4 \Rightarrow x > 2 \vee x < -2$$

$$\forall x: |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1 \quad \text{ד. } \exists k: n^3 - n = 6k \quad \text{ג. }$$

**3)** א. בקבוצת אינסוף איברים.  $A = (-4, 4)$

ב. בקבוצת 7 איברים.  $B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

ג. בקבוצת 3 איברים.  $C = \{1, 2, 3\}$

ד. בקבוצת 4 איברים.  $D = \{-3, -2, -1, 0\}$

ה. בקבוצת 2 איברים.  $E = \{0, 1\}$

ו. בקבוצת 9 איברים.  $F = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

$$B = \{11, 13, 17, 19\} \quad \text{ב. } A = \{x \mid x = 2n - 1, n \in \mathbb{N}\} \quad \text{א. } (4)$$

$$D = \{1, 4, 9, 16\} \quad \text{ד. } C = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 4^2, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\} \quad \text{ג. }$$

**5)** הקבוצות  $A$ ,  $B$  ו- $C$  שוות זו לזו, והקבוצות  $D$  ו- $E$  שוות זו לזו.

**6)** א. לא נכון.      ב. נכון.      ג. נכון.      ד. נכון.      ה. נכון.

ו. לא נכון.      ז. נכון.      ח. נכון.      ט. נכון.      י. נכון.

יא. לא נכון.      יב. לא נכון.      יג. נכון.      יד. לא נכון.

$$A = \{\{1, 2\}, 1, 2\} \quad \text{ב. } B = \{\{1, 2\}, \{1, 2\}\} \quad \text{ג. }$$

**8)** א.  $A, C$       ב.  $E, D$       ג. לא קיימת קבוצה כזו.

**9)** שאלת הוכחה.

$$A \cap B = \{4, 6, 8\}$$

$$A \cup B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

$$(B \cup C) \cap (B \cup D) = \{4, 6, 7, 8, 10\}$$

$$(A \cup B) \cap C = \{3, 5, 7, 9\}$$

$$\cdot (B \cap C) \cup (B \cap D) = \{6, 8\}$$

$$A \cap B = \emptyset$$

$$A \cup B = (-2, 4)$$

$$(B \cup C) \cap (B \cup D) = (-2, 1)$$

$$(A \cup B) \cap C = (0, 4)$$

$$\cdot (B \cap C) \cup (B \cap D) = [0, 1]$$

$$\cdot \{4, 5, 6\}$$

$$\cdot \emptyset$$

**13)** ללא פתרון.

**14)** שאלת הוכחה.

$$C^c = [1, 4]$$

$$B^c = [1, 4]$$

$$A^c = (-\infty, 1)$$

$$\cdot D^c = (-\infty, 1] \cup [3, 4]$$

**16)** ראו סרטון.

**17)** שאלת הוכחה.

**18)** טענה ב.

$$\cdot P(A) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{4\}, \{\{4\}\}, \{\emptyset, 4\}, \{4, \{4\}\}, \{\emptyset, \{4\}\}, \{\emptyset, 4, \{4\}\}\}$$

**20)** שאלת הוכחה.

**21)** שאלת הוכחה.

## חדוֹא לכלכלהים

### פרק 2 - רענון - מבוא לממן 11

#### תוכן העניינים

1. משואה ממעלה ראשונה ..... (לא ספר)
2. שתי משואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה ..... (לא ספר)
3. משואה ממעלה שנייה ..... (לא ספר)
4. משואות עם מכנה ..... (לא ספר)
5. משואות מערכיות ..... (לא ספר)
6. משואות לוגריתמיות ..... (לא ספר)
7. משואות עם שורשים ..... (לא ספר)

# חדוֹא לכלכלהים

## פרק 3 - פונקציות - ממן 11

### תוכן העניינים

1. מושג הפונקציה .....	(ללא ספר)
2. הפונקציה הליינרית .....	(ללא ספר)
3. הפונקציה הריבועית .....	(ללא ספר)
4. הפונקציה המעריכית והלוגריתמית .....	(ללא ספר)
5. פונקציות בסיסיות והחזזות (שיקופים) שלhn .....	(ללא ספר)
6. תרגול הפונקציה הריבועית .....	(ללא ספר)

## חדוֹא לכלכלהים

פרק 4 - בעיות גידול ודעיכה - מן 11

תוכן העניינים

1. כללי .....

(ללא ספר) .....

# חדוֹא לכלכלהים

## פרק 5 - חישוב נזירת של פונקציה

### תוכן העניינים

1. כללי הגזירה .....	(ללא ספר)
27 .....	2.
30 .....	3.
33 .....	4.
35 .....	5. כלל השרשרת .....

## תרגול בכלי הגירה

### שאלות

גזרו פעמיים את הפונקציות הבאות:

$$f(x) = \frac{2x^2}{(x+1)^2} \quad (3) \quad f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{2x+10} \quad (2) \quad f(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{2x} \quad (1)$$

$$f(x) = \left( \frac{x+1}{x-1} \right)^3 \quad (6) \quad f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2} \quad (5) \quad f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4} \quad (4)$$

$$f(x) = x \cdot \ln x \quad (9) \quad f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \quad (8) \quad f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad (7)$$

$$f(x) = \ln^2 x + 2 \ln x - 32 \quad (12) \quad f(x) = \ln \sqrt{\frac{1}{2-x}} \quad (11) \quad f(x) = x^2 \cdot \ln x \quad (10)$$

$$f(x) = (x+2) \cdot e^x \quad (15) \quad f(x) = e^x \quad (14) \quad f(x) = \ln^2 x + \frac{1}{\ln^2 x} \quad (13)$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1} \quad (18) \quad f(x) = \sqrt[3]{x^2} \quad (17) \quad f(x) = x \cdot e^{-2x^2} \quad (16)$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2} (1-x) \quad (19)$$

### תשובות סופיות

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 8}{4x^2}, \quad f''(x) = \frac{4}{x^3} \quad (1)$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 + 20x - 62}{(2x+10)^2}, \quad f''(x) = \frac{448}{(2x+10)^3} \quad (2)$$

$$f'(x) = \frac{4x}{(x+1)^3}, \quad f''(x) = \frac{4(1-2x)}{(x+1)^4} \quad (3)$$

$$f'(x) = \frac{x^2(x^2 - 12)}{(x^2 - 4)^2}, \quad f''(x) = \frac{4x \cdot (2x^2 + 24)}{(x^2 - 4)^3} \quad (4)$$

$$f'(x) = \frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3}, \quad f''(x) = \frac{6x}{(x+1)^4} \quad (5)$$

$$f'(x) = -\frac{6(x+1)^2}{(x-1)^4}, \quad f''(x) = 12 \frac{(x+1)(x+3)}{(x-1)^5} \quad (6)$$

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}, \quad f''(x) = \frac{2 \ln x - 3}{x^3} \quad (7)$$

$$f'(x) = \frac{2 - \ln x}{2x^{1.5}}, \quad f''(x) = \frac{3 \ln x - 8}{4x^{2.5}} \quad (8)$$

$$f'(x) = \ln x + 1, \quad f''(x) = \frac{1}{x} \quad (9)$$

$$f'(x) = x(2 \ln x + 1), \quad f''(x) = 2 \ln x + 3 \quad (10)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2(2-x)}, \quad f''(x) = \frac{1}{(4-2x)^2} \quad (11)$$

$$f'(x) = \frac{2}{x}(\ln x + 1), \quad f''(x) = \frac{-2 \ln x}{x^2} \quad (12)$$

$$f'(x) = \frac{2}{x} \left[ \frac{(\ln x)^4 - 1}{(\ln x)^3} \right], \quad f''(x) = -\frac{2}{x^2} \left\{ \frac{(\ln x)^5 - (\ln x)^4 - (\ln x) - 3}{(\ln x)^4} \right\} \quad (13)$$

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \left( -\frac{1}{x^2} \right), \quad f''(x) = e^{\frac{1}{x}} \left( \frac{1+2x}{x^4} \right) \quad (14)$$

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \left( \frac{x^2 - x - 2}{x^2} \right), \quad f''(x) = e^{\frac{1}{x}} \left( \frac{5x + 2}{x^4} \right) \quad (15)$$

$$f'(x) = e^{-2x^2} (1 - 4x^2), \quad f''(x) = -4xe^{-2x^2} (3 - 4x^2) \quad (16)$$

$$f'(x) = \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}}, \quad f''(x) = -\frac{2}{9 \cdot \sqrt[3]{x^4}} \quad (17)$$

$$f'(x) = \frac{2x}{\sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}}, \quad f''(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{-\frac{1}{3}x^2 - 1}{(x^2 - 1)^{5/3}} \quad (18)$$

$$f'(x) = \frac{2 - 5x}{3\sqrt[3]{x}}, \quad f''(x) = -\frac{2}{9} \cdot \frac{1 + 5x}{\sqrt[3]{x^4}} \quad (19)$$

## תרגילים נוספים לפי סוגים

### שאלות

#### הנגזרת של פונקציית חזקה

(1) גזוו את הפונקציות הבאות:

$$f(x) = x^2 \quad \text{ג.}$$

$$f(x) = x^7 \quad \text{ב.}$$

$$f(x) = x^3 \quad \text{א.}$$

$$f(x) = x^{-1} \quad \text{ד.}$$

$$f(x) = x^{-3} \quad \text{ה.}$$

$$f(x) = x^1 \quad \text{כ.}$$

$$f(x) = x^{\frac{3}{4}} \quad \text{ט.}$$

$$f(x) = x^{\frac{1}{3}} \quad \text{ח.}$$

$$f(x) = x^{\frac{1}{2}} \quad \text{ז.}$$

#### הנגזרת של קבוע כפול פונקציה

(2) גזוו את הפונקציות הבאות:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^4 \quad \text{ג.}$$

$$f(x) = 3x^7 \quad \text{ב.}$$

$$f(x) = 2x^3 \quad \text{א.}$$

$$f(x) = 3x^{-2} \quad \text{ד.}$$

$$f(x) = 8x^1 \quad \text{ה.}$$

$$f(x) = \frac{x^6}{7} \quad \text{כ.}$$

$$f(x) = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{3} \quad \text{ט.}$$

$$f(x) = 6x^{\frac{1}{2}} \quad \text{ח.}$$

$$f(x) = \frac{4}{x} \quad \text{ז.}$$

#### הנגזרת של קבוע

(3) גזוו את הפונקציות הבאות:

$$f(x) = \frac{7}{8} \quad \text{ב.}$$

$$f(x) = 12 \quad \text{א.}$$

#### הנגזרת של סכום והפרש

(4) גזוו את הפונקציות הבאות:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{x^3}{6} + \frac{3x}{4} - \frac{2}{5} \quad \text{ב.}$$

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 5 \quad \text{א.}$$

### הנגזרת של פונקציה חזקה מורכבת

5) גזוו את הפונקציות הבאות :

$$f(x) = 3(x - x^2)^2 \quad \text{א.}$$

$$f(x) = (x^3 + 6)^5 \quad \text{ב.}$$

$$f(x) = (5x - 2)^3 \quad \text{ג.}$$

$$f(x) = \frac{2(x+1)^4}{3} \quad \text{ד.}$$

$$f(x) = \frac{(5-x)^3}{4} \quad \text{ז.}$$

### הנגזרת של אחד חלקי איקס

6) גזוו את הפונקציות הבאות :

$$f(x) = \frac{3}{x^3} \quad \text{ט.}$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \quad \text{א.}$$

$$f(x) = \frac{2}{x} \quad \text{ב.}$$

$$f(x) = \frac{3}{x} \quad \text{ג.}$$

$$f(x) = \frac{6}{x+5} \quad \text{ד.}$$

$$f(x) = \frac{2}{3-x} \quad \text{ו.}$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x} \quad \text{ז.}$$

### הנגזרת של מכפלה

7) גזוו את הפונקציות הבאות :

$$f(x) = (5x+1)(x-3) \quad \text{א.}$$

$$f(x) = (5x+1)^3(x-3) \quad \text{ב.}$$

$$f(x) = x^3(6-x)^4 \quad \text{ג.}$$

### הנגזרת של מנת

8) גזוו את הפונקציות הבאות :

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3} \quad \text{א.}$$

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{5x - 12} \quad \text{ב.}$$

$$f(x) = \frac{3x - 1}{1 + 2x} \quad \text{ג.}$$

$$f(x) = \frac{3}{x^3} \quad \text{ד.}$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{ה.}$$

$$f(x) = \frac{x^2 + 8}{x - 1} \quad \text{ז.}$$

### הנגזרת של שורש

9) גזוו את הפונקציות הבאות :

$$f(x) = \sqrt{x^3 - 1} \quad \text{א.}$$

$$f(x) = 4\sqrt{x+1} \quad \text{ב.}$$

$$f(x) = \sqrt{x} \quad \text{ג.}$$

$$f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x}} \quad \text{ד.}$$

$$f(x) = x^2\sqrt{x+3} \quad \text{ה.}$$

$$f(x) = (3x+1)\sqrt{x} \quad \text{ז.}$$

## תשובות סופיות

(1)

$$f'(x) = 2x \quad .\text{א}$$

$$f'(x) = 7x^6 \quad .\text{ב}$$

$$f'(x) = 3x^2 \quad .\text{ג}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \quad .\text{ד}$$

$$f'(x) = 3x^{-4} \quad .\text{ה}$$

$$f'(x) = 1 \quad .\text{ט}$$

$$f'(x) = \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}} \quad .\text{ו}$$

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \quad .\text{ז}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad .\text{ח}$$

(2)

$$f'(x) = 2x^3 \quad .\text{א}$$

$$f'(x) = 21x^6 \quad .\text{ב}$$

$$f'(x) = 6x^2 \quad .\text{ג}$$

$$f'(x) = -\frac{6}{x^3} \quad .\text{ד}$$

$$f'(x) = 8 \quad .\text{ה}$$

$$f'(x) = \frac{6x^5}{7} \quad .\text{ט}$$

$$f'(x) = \frac{2}{9\sqrt[3]{x}} \quad .\text{ו}$$

$$f'(x) = \frac{3}{\sqrt{x}} \quad .\text{ז}$$

$$f'(x) = -\frac{4}{x^2} \quad .\text{ח}$$

0. ב

0. ג (3)

$$f'(x) = x^3 - \frac{x^2}{2} + \frac{3}{4} \quad .\text{ב}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 4x - 3 \quad .\text{ג}$$

$$f'(x) = 15x^2(x^3 + 6)^4 \quad .\text{ד}$$

$$f'(x) = 15(5x - x)^2 \quad .\text{ז}$$

$$f'(x) = \frac{8(x+1)^3}{3} \quad .\text{ו}$$

$$f'(x) = -\frac{3}{4}(5-x)^2 \quad .\text{ז}$$

$$f'(x) = 6(x-x^2)(1-2x) \quad .\text{ח}$$

$$f'(x) = -\frac{9}{x^4} \quad .\text{ט}$$

$$f'(x) = -\frac{2}{x^3} \quad .\text{א}$$

$$f'(x) = \frac{2}{x^2} \quad .\text{ב}$$

$$f'(x) = -\frac{3}{x^2} \quad .\text{ג}$$

$$f'(x) = -\frac{6}{(x+3)^2} \quad .\text{ד}$$

$$f'(x) = \frac{2}{(3-x)^2} \quad .\text{ז}$$

$$f'(x) = -\frac{2x-3}{(x^2-3x)^2} \quad .\text{ח}$$

$$f'(x) = (5x+1)^2(20x-44) \quad .\text{ב}$$

$$f'(x) = 10x-14 \quad .\text{ג}$$

$$f'(x) = x^2(6-x)^3(18-7x) \quad .\text{ה}$$

$$f'(x) = \frac{8x}{(x^2+3)^2} \quad .\text{ו}$$

$$f'(x) = \frac{5x^2-24x-5}{(5x-12)^2} \quad .\text{ז}$$

$$f'(x) = \frac{5}{(1+2x)^2} \quad .\text{ח}$$

$$f'(x) = -\frac{9}{x^4} \quad .\text{ט}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \quad .\text{ו}$$

$$f'(x) = \frac{(x-4)(x+2)}{(x-1)^2} \quad .\text{ז}$$

$$f'(x) = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-1}} \quad .\text{א}$$

$$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{x+1}} \quad .\text{ב}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad .\text{ג}$$

$$f'(x) = \frac{x-3}{2x\sqrt{x}} \quad .\text{ד}$$

$$f'(x) = \frac{x(5x+12)}{2\sqrt{x+3}} \quad .\text{ז}$$

$$f'(x) = \frac{9x+1}{2\sqrt{x}} \quad .\text{ט}$$

## גירה סטומה

### שאלות

1) גזו את הפונקציה הסטומה  $x^2 + y^5 - 1 = 1$ .

2) גזו את הפונקציה הסטומה  $4 \ln x + 10 \ln y = y^2$ .

3) גזו את הפונקציה הסטומה  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{xy}$ .

4) נתונה הפונקציה הסטומה הבאה  
חשבו את  $y'$  בנקודה  $(1,2)$ .

5) נתונה הפונקציה הסטומה הבאה  
חשבו את  $y'$  בנקודה  $y=0$ .

6) גזו את הפונקציה הסטומה  $x^y - xy = 10$ .

7) גזו את הפונקציה הסטומה  $x^y - y^x = 1$ .

8) נתונה פונקציה סטומה  $xy - y^3 + x^2 - x = 0$   
מצאו את ערך  $y^n$  בנקודה  $y=1$ .

9) נתון עקום שמשוואתו  $yx^2 + e^y = x$   
א. הראו שעבור  $x=1$  קיים ערך  $y$  אחד ויחיד ומצאו אותו.  
ב. חשבו את  $y'$  בנקודה  $x=1$ .

10) נתון כי המשווה  $h(y) - x + 1 = 2x^3 + 4e^y + 2y$   
מגדירה את  $y(x)$  כפונקציה סטומה של  $x$ .  
נתון כי  $h(y)$  גירה ברציפות ויורדת.  
הוכחו כי  $y(x)$  יורדת חזק.

**תשובות סופיות**

$$5y^4 - 1 \neq 0, \quad y' = \frac{-2x}{5y^4 - 1} \quad (1)$$

$$\frac{10}{y} - 2y \neq 0, \quad y' = \frac{\frac{4}{-x}}{\frac{10}{y} - 2y} \quad (2)$$

$$\sqrt{x} \neq 0, \quad \sqrt{x} \neq 1, \quad y' = \frac{\sqrt{y} - 1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{2\sqrt{y}}{1 - \sqrt{x}} \quad (3)$$

$$y'_{(1,2)} = -\frac{14}{11} \quad (4)$$

$$y'_{(1,0)} = 1 \quad (5)$$

$$x^y \cdot \ln x - x \neq 0, \quad y' = \frac{y - x^y \cdot \frac{y}{x}}{x^y \cdot \ln x - x} \quad (6)$$

$$x^y \ln x - y^x \cdot \frac{x}{y} \neq 0, \quad y' = \frac{-x^y \cdot \frac{y}{x} + y^x \cdot \ln y}{x^y \ln x - y^x \cdot \frac{x}{y}} \quad (7)$$

$$-1 \quad (8)$$

$$y''_{(1,0)} = -\frac{9}{8} \text{ ב.} \quad (9)$$

**(10) שאלת הוכחה.**

## כל השרשרת

### שאלות

**1)** נתונה פונקציה  $f(x)$ , המקיים  $f'(4) = 10$

ונדר פונקציה חדשה:  $g(x) = f(x^2)$

חשבו את  $g'(2)$ .

**2)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. נתונה פונקציה  $f(x)$ . ונדר פונקציה חדשה

$$z(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) - f(4x+1)$$

חשב ואות  $z'(x)$ .

ב. נתונה פונקציה  $f(x)$  המקיים  $f(1) = 2, f'(1) = e$

ונדר פונקציה חדשה  $z(x) = f^2(\ln x) + \frac{1}{f^2(\ln x)}$

חשבו את  $z'(e)$ .

**3)** נתונה הפונקציה  $g(x) = \frac{f^2(\sqrt{x}) - 1}{f(\sqrt{x})}$

ידעו כי  $f(10) = f'(10) = 4$

חשבו  $g'(100)$ .

**4)** נתונה הפונקציה  $g(x) = \frac{f\left(\frac{1}{x}\right) + 4}{f\left(\frac{1}{x^2}\right)}$

ידעו כי  $f(1) = 1, f'(1) = 4$

חשבו  $g'(1)$ .

5) נתונה הפונקציה  $\cdot g(x) = \frac{f^2(\ln x)}{f(\ln x) + 1}$

ידוע כי  $f(0) = 2$ ,  $f'(0) = 1$

חשבו  $g'(1)$ .

6) נתונה הפונקציה  $\cdot g(x) = \frac{f^{10}(4x) + 1}{f\left(\frac{4}{x}\right) + 1}$

ידוע כי  $f(4) = 1$ ,  $f'(4) = 2$

חשבו  $g'(1)$ .

7) נתונה הפונקציה  $\cdot g(x) = \frac{\sqrt[4]{f^7(x^2)}}{f(x^4)}$

ידוע כי  $f(1) = 1$ ,  $f'(1) = 4$

חשבו  $g'(1)$ .

8) ענו על הסעיפים הבאים :

א. הוכיחו שהנגזרת של פונקציה זוגית היא פונקציה אי-זוגית  
והנגזרת של פונקציה אי-זוגית היא פונקציה זוגית.

ב. הפונקציה  $f(x)$  היא אי-זוגית. בדקו האם הפונקציה  $(x)'''$   
היא זוגית או אי-זוגית.

ג. הפונקציה  $f(x)$  אי-זוגית נגדיר  $\cdot g(x) = (f(x))^4$   
קבעו האם הפונקציה  $(x)'g$  זוגית או אי-זוגית.

ד. ידוע שנגזרת של פונקציה היא זוגית.  
האם ניתן לקבוע שהפונקציה היא אי-זוגית?

**תשובות סופיות**40 **(1)**

$$z'(e) = 3 \frac{3}{4} . \text{ ב. } z'(x) = f'\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) - f'(4x+1) \cdot 4 . \text{ א.}$$
**(2)**

$$\frac{17}{80} \quad \text{ב.}$$
**(3)**
36 **(4)**

$$\frac{8}{9} \quad \text{ב.}$$
**(5)**
44 **(6)**-2 **(7)**

ב. אי-זוגית. ג. אי-זוגית. ד. לא.

**(8)**

## חדוֹא לכלכלהים

פרק 6 - המשמעות הגיאומטרית של הנגזרת -מן 12

תוכן העניינים

1. כללי .....

(ללא ספר) .....

# חדוֹא לכלכלהים

## פרק 7 - חקירת פונקציה

### תוכן העניינים

38 .....	1. מושגי יסוד .....
39 .....	2. חקירת פולינום .....
40 .....	3. חקירת פונקציה לוגריתמית .....
43 .....	4. חקירת פונקציה – שאלות כלליות .....
48 .....	5. הוכחת אי שוויונות בעזרת חקירת פונקציה .....

## הערות

1. בשאלות החקירה בפרק זה יש לחקור לפי השלבים הבאים:

- תחום הגדרה ורציפות.
- נקודות חיתוך עם הצירים.
- זוגיות ואי-זוגיות.
- אסימפטוטות אנכיות, אופקיות ומשופעת.
- תחומי עלייה וירידה.
- נקודות קיצון.
- תחומי קמירות וקעירות.
- נקודות פיתול.
- שרטוט סקיצה של גраф הפונקציה.

2. יש האומרים על פונקציה קמורה שהיא קעורה כלפי מעלה ועל פונקציה קעורה שהיא קעורה כלפי מטה. אלה מינוחים שמקובלים בדרך כלל בתיכון.

3. ברוב המוסדות האקדמיים לומדים למצוא אסימפטוטה משופעת, שכוללת בתוכה גם את האפשרות לאסימפטוטה אופקית. יחד עם זאת, חלק מהמוסדות לומדים רק אסימפטוטה אופקית, ולכן בכל חקירה אני מוצא גם אסימפטוטה משופעת וגם אופקית. צפו בפתרון רק בחלק ברלוונטי עבורכם.

4. בחלק מהפתרונות אזכיר שאלה שאין צורך לעبور על כל שלבי החקירה. שימוש לב זהה.

5. אני ממליץ על תוכנה חינמית בשם Graph, שניית להוריד [כאן](#). בעורתה תוכלו לשרטט כל פונקציה בקלות ולבזוק את תשובותיכם.

## חקירת פולינום

### שאלות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה :

$$f(x) = x^4 - 2x^3 \quad (2)$$

$$f(x) = x(x-9)^2 \quad (1)$$

### תשובות סופיות

(1) תחומי הגדרה : כל  $x$ . נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$  : 0, עם ציר ה- $x$  : 0, 9.

נקודות קיצון : מינימום : (9, 108), מקסימום :

תחום עלייה :  $x < 3$  or  $x > 9$ , ירידה :  $3 < x < 9$ .

תחום קמירות :  $x < 6$ , קעירות :  $x > 6$ .

נקודות פיתול : (6, 54).

(2) תחומי הגדרה : כל  $x$ . נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$  : 0, עם ציר ה- $x$  : 0, 2.

נקודות קיצון : מינימום :  $\left(1.5, \frac{-27}{16}\right)$

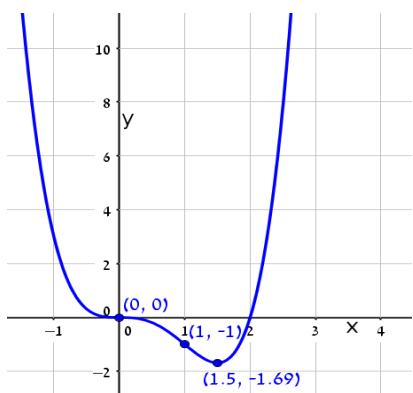
תחום עלייה :  $x < 1.5$ , ירידה :  $x > 1.5$ .

תחום קמירות :  $0 < x < 1$  or  $x > 1$ , קעירות :

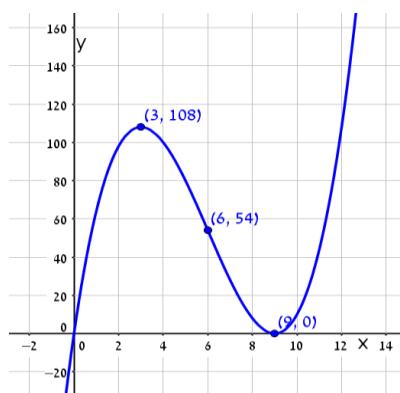
נקודות פיתול : (0, 0), (1, -1).

### גרפים

(2)



(1)



## חקירת פונקציה לוגריתמית

### שאלות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה :

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \quad (2)$$

$$f(x) = x \cdot \ln x \quad (3)$$

## תשובות סופיות

(1) תחום הגדרה ורכיפות: לכל  $x > 0$ . זוגיות: כללית.  
 נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ : אין, עם ציר ה- $x$ : 1.  
 אסימפטוטה אנכית: הישר  $x = 0$ , משופעת ואופקית: הישר  $y = 0$ .

נקודות קיצון: מקסימום  $\cdot \left( e, \frac{1}{e} \right)$

תחום עלייה:  $x < e^0$ , ירידה:  $x > e^0$ .

נקודת פיתול:  $\left( e^{1.5}, \frac{1.5}{e^{1.5}} \right)$

תחום קמירות:  $0 < x < e^{1.5}$ , קעירות:  $x > e^{1.5}$ .

(2) תחום הגדרה ורכיפות: לכל  $x > 0$ . זוגיות: כללית.

נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ : אין, עם ציר ה- $x$ : 1.

אסימפטוטה אנכית (חד-צדדית): הישר  $x = 0$ , משופעת ואופקית: הישר  $y = 0$ .

נקודות קיצון: מקסימום  $\cdot \left( e^2, \frac{2}{e} \right)$

תחום עלייה:  $x > e^2$ , ירידה:  $x < e^2$ .

$\cdot x > e^{\frac{8}{3}}$  תחום קמירות:  $0 < x < e^{\frac{8}{3}}$ , קעירות:  $x > e^{\frac{8}{3}}$ .  
 נקודת פיתול:  $\left( e^{\frac{8}{3}}, \frac{8}{\sqrt{e^{\frac{8}{3}}}} \right)$

(3) תחום הגדרה ורכיפות: לכל  $x > 0$ . זוגיות: כללית.

נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ : אין, עם ציר ה- $x$ : 1.

אסימפטוטה אנכית: אין, משופעת: אין.

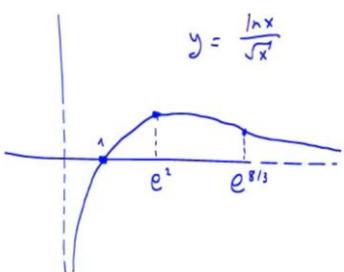
נקודות קיצון: מינימום  $\cdot \left( e^{-1}, -e^{-1} \right)$ .

תחום עלייה:  $x > e^{-1}$ , ירידה:  $0 < x < e^{-1}$ .

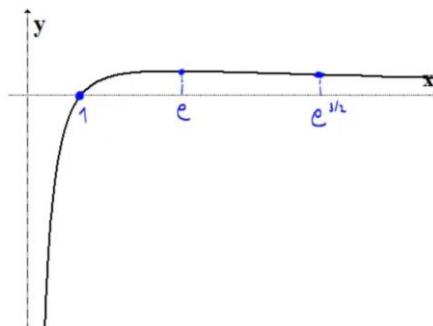
נקודת פיתול: אין. קמורה בכל תחום הגדרתה.

**גרפים**

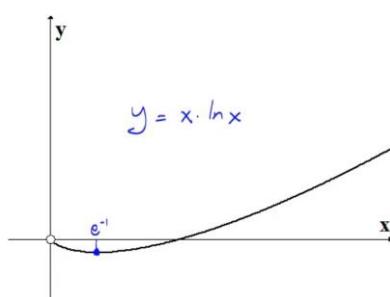
(2)



(1)



(3)



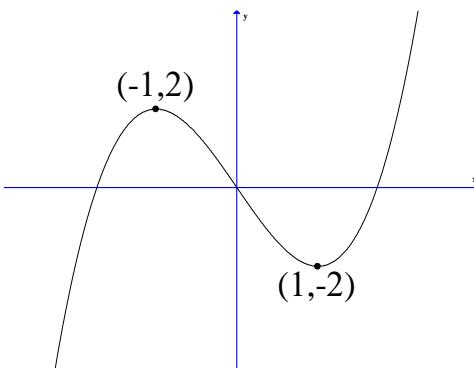
## חקירת פונקציה – שאלות כלליות

### שאלות

- 1) נתונה הפונקציה  $f(x) = ax^3 + x^2$ , וידוע שהנקודה  $x=1$  נקודת קיצון. מצאו את הקבוע  $a$ .
- 2) נתונה הפונקציה  $f(x) = ax^3 + bx^2$ , וידוע שהנקודה  $(1,2)$  נקודת קיצון. מצאו את הקבועים  $a, b$ .
- 3) נתונה הפונקציה  $f(x) = ax^3 + x^2$ , וידוע שהנקודה  $x=1$  נקודת פיתול. מצאו את הקבוע  $a$ .
- 4) נתונה הפונקציה  $f(x) = ax^3 + bx^2$ , וידוע שהנקודה  $(1,2)$  נקודת פיתול. מצאו את הקבועים  $a, b$ .
- 5) נתונה הפונקציה  $f(x) = ax^3 + x^2$ . שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה  $x=3$  הוא 33. מצאו את  $a$ .
- 6) נתונה הפונקציה  $f(x) = ax^3 + bx^2$ . שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה  $(3,9)$  הוא 12. מצאו את  $b$ .
- 7) נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{ax^3 + x^2}{2x^3 + x + 6}$ . ידוע שהישר  $y = 4$  אסימפטוטה לגרף הפונקציה. מצאו את  $a$ .
- 8) נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{ax^2 + bx + 4}{x}$ . ידוע שהישר  $y = 0.5x + 1$  אסימפטוטה לגרף הפונקציה. מצאו את  $a$  ואת  $b$ .

- 9) נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{x^2 + ax + 6}$ .  
 ידוע שהישר  $x=1$  אסימפטוטה לגרף הפונקציה.  
 מצאו את  $a$ .

שאלות 10-17 מתייחסות לגרף הפונקציה  $f(x) = x^3 - 3x$



- 10) מהו מספר הפתרונות של המשוואה  $f(x) = 5$  ?
- 11) מהו מספר הפתרונות של המשוואה  $f(x) = 2$  ?
- 12) מהו מספר הפתרונות של המשוואה  $f(x) = 0.5$  ?
- 13) עברו איזה ערך של  $k$ , למשוואה  $f(x) = k$  יש בדיקות פתרון אחד?
- 14) עברו איזה ערך של  $k$ , למשוואה  $f(x) = k$  יש בדיקות שני פתרונות?
- 15) עברו איזה ערך של  $k$ , למשוואה  $f(x) = k$  יש בדיקות שלושה פתרונות?
- 16) האם קיים ערך של  $k$ , עבורו למשוואה  $f(x) = k$  אין פתרון?
- 17) מצאו את התחומים בהם הפונקציה חח"ע.
- 18) נתונה פונקציה  $f(x)$  המקיימת  $f'(2) = 4$ .  
 נגידר פונקציה חדשה  $z(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$   
 א. חשבו  $z'(0.5)$ .  
 ב. נתון בנוסף כי  $f$  עולה. הוכחו כי  $z$  יורדת.

19) נתונה פונקציה  $f(x)$  המקיים  $f(1) = 2$ ,  $f'(1) = e$

$$\text{נדיר פונקציה חדשה } z(x) = f^2(\ln x) + \frac{1}{x}$$

א. האם  $z$  עולה או יורדת בנקודת  $x = e$ ?

ב. נתון בנוסף כי  $f$  שלילית וולגה.

מה ניתן לומר על תחומי העלייה והירידה של  $z$ ?

20) נתונה פונקציה  $f(x)$  חיובית ויורדת.

$$\text{נדיר פונקציה חדשה } z(x) = \sqrt{f(x^2) + 4}$$

מי מהබאים בהכרח נכון?

א.  $z$  עולה לכל  $x$ .

ב.  $z$  יורדת לכל  $x$ .

ג.  $z$  עולה לכל  $x > 0$ .

ד.  $z$  יורדת לכל  $x > 0$ .

21) נתונה פונקציה  $f(x)$ , המקיים  $f'(1) = e$

$$\text{נדיר פונקציה חדשה : } g(x) = x^2 + f(\ln x)$$

א. חשבו את  $(e)'$ .

ב. הוכיחו שהפונקציה  $g$  עולה בנקודת  $x = e$ .

$$\text{חשבו את הגבול } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(e+h) - g(e)}{h}$$

22) הפונקציה  $f(x)$  היא אי-זוגית.

ידוע שנקודות החיתוך היחידה של  $f(x)$  עם ציר ה- $x$  היא ב- $0 = x$ .

נדיר  $g(x) = (f(x))^2$ . איזו מבחן הטענות הבאות בהכרח לא נכונה:

א. אם  $f$  עולה בכל תחום הגדרתה אז  $-g$  יש נקודות מינימום.

ב. אם  $f$  יורדת בכל תחום הגדרתה אז  $-g$  יש נקודות מינימום.

ג. אם  $f$  עולה בכל תחום הגדרתה אז  $-g$  אין נקודות קיצון.

**23)** הפונקציה  $f(x) = a \cdot f(x)$  מוגדרת וגזירה פעמיים לכל  $x$  ומקיים  $f''(x) = a < 0$ .

איו מבין הטענות הבאות בהכרח לא נכונה:

- בתחום בו  $f'(x)$  שלילית,  $f(x)$  קמורה (קעורה כלפי מעלה).
- אם  $f(x)$  חיובית בתחום מסוים אז  $f'(x)$  יורדת באותו תחום.
- אם בתחום מסוים  $f(x)$  עולה וחותכת את ציר  $x$  בנקודה  $(0, n)$ , אז שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה  $n = x$  הוא המקסימלי באותו תחום.
- אם לפונקציה  $f(x)$  יש נקודת פיתול אז  $f'(x)$  שלילית בכל תחום הגדרתה.

**תשובות סופיות**

$$a = -\frac{2}{3} \quad (1)$$

$$a = -4, b = 6 \quad (2)$$

$$a = -\frac{1}{3} \quad (3)$$

$$a = -1, b = 3 \quad (4)$$

$$a = 1 \quad (5)$$

$$a = \frac{2}{3}, b = -1 \quad (6)$$

$$a = 8 \quad (7)$$

$$a = \frac{1}{2}, b = 1 \quad (8)$$

$$a = -7 \quad (9)$$

$$1 \quad (10)$$

$$2 \quad (11)$$

$$3 \quad (12)$$

$$k < -2, k > 2 \quad (13)$$

$$k = \pm 2 \quad (14)$$

$$-2 < k < 2 \quad (15)$$

(16) לא

$$x < -1, -1 < x < 1, x > 1 \quad (17)$$

$$\text{ב. שאלת הוכחה.} \quad z'(0.5) = -16. \quad \text{א.} \quad (18)$$

(19) א. עולה.  
ב. יורדת.

ד (20)

ג. שאלת הוכחה. א.  $2e+1$ .  $2e+1$ . (21)

ג (22)

ד (23)

## הוכחת אי שוויונות בעזרת חקירת פונקציה

### שאלות

הוכיחו את אי השוויונים הבאים לגבי התחום הרשום לידם :

$$(-\infty < x < \infty), \quad 8x^3 \leq 3x^4 + 6x^2 \quad (1)$$

$$\left( 0 < x < \frac{\pi}{3} \right), \quad x < 2 \sin x \quad (2)$$

$$(x > 0), \quad \sqrt{x+1} < 1 + \frac{x}{2} \quad (3)$$

$$(x \geq 0), \quad \ln(x+1) \leq x \quad (4)$$

5) נתון כי  $f$  רציפה לכל  $x \geq 0$ ,  $f'(x) > 0$ , וכן  $f(0) = 0$ .

הוכיחו כי לכל  $x > 0$  מתקיים  $f(x) - \frac{1}{2}(f(x))^2 < \ln(1 + f(x))$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

# חדוֹא לכלכלהים

## פרק 8 - בעיות מינימום ומקסימום כלכליות

### תוכן העניינים

1. בעיות מינימום ומקסימום כלכליות במשתנה יחיד ..... (ללא ספר)

## חדוֹא לכלכלהים

פרק 9 - פונקציות של שני משתנים. עקומות שותות ערך. נגורות חלקיות - ממן  
13

### תוכן העניינים

- |   |    |
|---|----|
| 1. פונקציות של שני משתנים - קווי גובה ..... | 49 |
| 2. נגורות חלקיות.....                       | 53 |

## פונקציות של שני משתנים – קווי גובה

### שאלות

**1)** מהו תחום ההגדרה של הפונקציה :  $f(x, y) = \frac{y}{x}$   
شرطט מפת קווי גובה.

**2)** מהו תחום ההגדרה של הפונקציה :  $f(x, y) = \ln x + \ln y$   
شرطט מפת קווי גובה.

**3)** מהו תחום ההגדרה של הפונקציה :  $f(x, y) = x^2 + y^2$   
شرطט מפת קווי גובה.

**4)** מהו תחום ההגדרה של הפונקציה :  $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$   
شرطט מפת קווי גובה.

**5)** מהו תחום ההגדרה של הפונקציה :  $f(x, y) = \ln(x^2 - y)$   
شرطט מפת קווי גובה.

**6)** מהו תחום ההגדרה של הפונקציה :  $f(x, y) = x\sqrt{y}$   
شرطט מפת קווי גובה.

**7)** תהיו :  $f(x, y) = (x+p)(y+q)$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$  פונקציית תועלת של פרט.  
נקודות :  $(1,6), (3,2), (0,14)$

א. מצא את  $p$  ו-  $q$ . הצב אותם בפונקציית התועלת.

ב. מהי משווהת עקומת האדישות עליה מונחות הנקודות הנתונות?  
עליך להגיע למשווהה מפורשת. שרטט את עקומת האדישות.

**8)** שרטט לפונקציה :  $f(x, y) = \begin{cases} x^2 + 3x - y - 3 & x^2 \geq y \\ -x^2 + 3x + y - 3 & x^2 < y \end{cases}$   
את קו הגובה :  $f(x, y) = 1$

$$9) \text{ נגיד}: f(x,y) = \begin{cases} 3x+y & y > x \\ 4x & y \leq x \end{cases} . \quad \text{הנח כי: } x, y \geq 0$$

شرطט את העקומות שווות הערך:  $f(x,y) = 4,12$  עבר הfonקציה הנתונה.

$$10) \text{ שרטט את מפת העקומות שווות הערך של: } f: R_+^2 \rightarrow R_+, f(x,y) = \min\left\{\frac{x}{3}, y\right\}$$

$$11) \text{ שרטט עקומות שווות ערך לפונקציה: } f(x,y) = \min\{3x, y\}$$

$$12) \text{ שרטט לפונקציה: } f(x,y) = \min\{y - x^2, x + y\}$$

$$\text{את קווי הגובה: } f(x,y) = 2, f(x,y) = 0$$

$$13) \text{ נתונה הפונקציה: } f(x,y) = \begin{cases} x^2 - y & x \leq 1 \\ 2x + y & x > 1 \end{cases}$$

א. שרטט את קו הגובה:  $f(x,y) = 0$

ב. לאילו ערכי  $C$  קו הגובה:  $f(x,y) = C$  יהיה קו רציף?  
ציר את קו הגובה במקרה זה.

14) פונקציית התועלת של פרט הצורך את המוצרים  $x$  ו-  $y$

$$u(x,y) = \begin{cases} y - x^2 + 4x & x \leq 4 \\ x - y & 4 < x \leq 6 \\ y - \ln x & 6 < x \end{cases} \quad \text{היא:}$$

א. שרטט את קו הגובה:  $u(x,y) = 3$ .

ב. הסבר מהי המשמעות הכלכלית של קו הגובה שמצאת.

ג. ידוע כי הפרט צורך את הכמות  $(4,8)$ .

האם הפרט יהיה אדייש במעבר לצריכת הכמות  $(7,9)$ ?

$$15) \text{ שרטט את מפת העקומות שווות הערך של: } f: R^2 \rightarrow R, f(x,y) = 100 - 5x - 2y$$

באיזה כיוון עליך לזרז מעוקמה לעקומה על מנת להגדיל את הערך של  $f$ ?

.  $f(x, y) = 3x - y + 3$  : **16)**شرط עקומות שוות ערך לפונקציה

.  $f(x, y) = x^3 - y$  : **17)**شرط עקומות שוות ערך לפונקציה

.  $f(x, y) = (x-1)^2 + (y+3)^2$  : **18)**شرط עקומות שוות ערך לפונקציה

.  $f(x, y) = e^{x-y}$  : **19)**شرط עקומות שוות ערך לפונקציה

.  $f(x, y) = 2 \ln x + \ln y$  : **20)**شرط עקומות שוות ערך לפונקציה

,  $f(x, y) = (x-y)^2$  : **21)**شرط לפונקציה

.  $f(x, y) = 0$  ,  $f(x, y) = 4$  : את קווי הגובה

### תשובות סופיות

(1)  $x \neq 0$ , המישור ללא ציר ה- $y$ .

(2)  $x > 0, y > 0$ , הרביע הראשון ללא הצירים.

(3) כל המישור.

(4)  $x^2 + y^2 \leq 1$ , עיגול היחידה.

(5)  $y < x^2$

(6)  $y \geq 0$ , חצי המישור העליון.

ב.  $y = \frac{16}{x+1} - 2$ .

$u(x, y) = (x+1) \cdot (y+2)$ ,  $p=1, q=2$ .

(7) א. ראה סרטן.

(8) ראה סרטן.

(9) ראה סרטן.

(10) ראה סרטן.

(11) ראה סרטן.

(12) ראה סרטן.

(13) א. ראה סרטן.

ג. הפרט לא אדיש.

ב. ראה סרטן.

(14) א. ראה סרטן.

(15) ראה סרטן.

(16) ראה סרטן.

(17) ראה סרטן.

(18) ראה סרטן.

(19) ראה סרטן.

(20) ראה סרטן.

(21) ראה סרטן.

## פונקציות של שני משתנים – נגררות חלקיות

### שאלות

1) נתונה הפונקציה :  $f(x, y) = 4x^3 - 3x^2y^2 + 2x + 3y$   
 חשב את הנגזרת לפיה  $x$  ואת הנגזרת לפיה  $y$ .

2) נתונה הפונקציה :  $f(x, y) = x^5 \cdot \ln y$   
 חשב את הנגזרת לפיה  $x$  ואת הנגזרת לפיה  $y$ .

3) נתונה הפונקציה :  $f(x, y) = \frac{x^2y^4(\sqrt{y} + 5\ln y)}{y^2 + 5y + y^y}$   
 חשב את הנגזרת לפיה  $x$ .

4) נתונה הפונקציה :  $f(x, y) = (x^2 + y^3) \cdot (2x + 3y)$   
 חשב את הנגזרת לפיה  $x$  ואת הנגזרת לפיה  $y$ .

5) נתונה הפונקציה :  $f(x, y) = \frac{x^2 - 3y}{x + y^2}$   
 חשב את הנגזרת החלקית לפיה  $x$  ואת הנגזרת החלקית לפיה  $y$ .

6) חשב את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני עברו :  $f(x, y) = x^3 + y^3 - 6xy$

7) חשב את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני עברו :  
 $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3(1-y)(x-y)$

8) חשב את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני עברו :  $f(x, y) = xy(x-y)$

9) חשב את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני עברו :  
 $f(x, y) = (x-9)(2y-6)(4x-3y+12)$

10) חשב את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני עברו :  $f(x, y) = e^{xy}(x+y)$

.  $f(x, y) = e^{x+y} (x^2 + y^2)$  חשב את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני עברו :

.  $f(x, y) = (x^2 + 2y^2) e^{-(x^2+y^2)}$  חשב את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני עברו :

.  $f(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2)$  חשב את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני עברו :

.  $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$  חשב את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני עברו :

.  $f(x, y) = \ln(\sqrt[3]{x^2 + y^2})$  חשב את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני עברו :

.  $f(x, y) = \ln(xy - x^2 - y^2)$  חשב  $f'_{xy}(1,1)$  :

.  $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$  חשב  $f'_{xy}(1,1)$  :

.  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$  חשב  $f'_{xy}(1,1)$  :

.  $z(x, y) = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{y})$  נתון :

$$\text{הוכח כי : } x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2}$$

.  $f(x, y, z) = e^x \cdot \left(y^2 - \frac{1}{z}\right)$  נתון :

.  $\frac{\partial f}{\partial x}\left(0, -1, \frac{1}{2}\right), \frac{\partial f}{\partial y}\left(0, -1, \frac{1}{2}\right), \frac{\partial f}{\partial z}\left(0, -1, \frac{1}{2}\right)$  חשב :

.  $f(x, y) = \frac{x^2}{\ln y + x}$  נתון :

.  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, e), \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, e), \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, e)$  חשב :

**22)** חשב את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני עברו :

$$\cdot f(x, y) = 4x^2 - x^2y^2 + 4x + 10y$$

**23)** חשב את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני עברו :  $f(x, y) = x^4 \cdot \ln y$

**24)** חשב את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני עברו :  $f(x, y, z) = xyz$

## תשובות סופיות

$$f_y(x, y) = -6x^2y + 3, \quad f_x(x, y) = 12x^2 - 6xy^2 + 2 \quad (1)$$

$$f_y(x, y) = \frac{x^5}{y}, \quad f_x(x, y) = 5x^4 \ln y \quad (2)$$

$$f_x(x, y) = \frac{y^4(\sqrt{y} + 5 \ln y)}{y^2 + 5y + y^y} \cdot 2x \quad (3)$$

$$f_y(x, y) = (2x + 3y) + 3(x^2 + y^2), \quad f_x(x, y) = 2x(2x + 3y) + 2(x^2 + y^3) \quad (4)$$

$$f_y(x, y) = \frac{-3x - 3y^2 - 2x^2y + 6y^2}{(x + y^2)^2}, \quad f_x(x, y) = \frac{2x(x + y^2) - 1(x^2 - 3y)}{(x + y^2)^2} \quad (5)$$

**סדר ראשון:**

$$f_y(x, y) = 3y^2 - 6x, \quad f_x(x, y) = 3x^2 - 6y$$

**סדר שני:**

$$f_{yx} = -6, \quad f_{xy} = 0 - 6, \quad f_{yy} = 6y - 0, \quad f_{xx} = 6x - 0$$

**סדר ראשון:**

$$f_y(x, y) = 3y^2 + 3 - 3x - 6y, \quad f_x(x, y) = 3x^2 + 3 - 3y$$

**סדר שני:**

$$f_{xy} = f_{yx} = -3, \quad f_{yy} = 6y - 6, \quad f_{xx} = 6x$$

**סדר ראשון:**

$$f_y(x, y) = x^2 - 2xy, \quad f_x(x, y) = 2xy - y^2$$

**סדר שני:**

$$f_{xy} = f_{yx} = 2x - 2y, \quad f_{yy} = -2x, \quad f_{xx} = 2y$$

**סדר ראשון:**

$$f_x(x, y) = 2[8xy - 3y^2 \cdot 1 - 24x - 0 + 57y \cdot 1 + 72 + 0 + 0]$$

$$f_y(x, y) = 2[4x^2 \cdot 1 - 3x \cdot 2y - 0 - 54y + 57x \cdot 1 + 0 + 27 + 0]$$

**סדר שני:**

$$f_{yy} = 2[0 - 6x \cdot 1 - 54 + 0 + 0], \quad f_{xx} = 2[8y - 0 - 24]$$

$$f_{xy} = f_{yx} = 2[8x \cdot 1 - 6y - 0 + 57 + 0]$$

**סדר ראשון:**

$$f_y(x, y) = e^{xy}(x^2 + xy + 1), \quad f_x(x, y) = e^{xy}(xy + y^2 + 1)$$

**סדר שני:**

$$f_{yy} = e^{xy} \cdot x \cdot (x^2 + xy + 1) + (0 + x) \cdot e^{xy}, \quad f_{xx} = e^{xy} \cdot y \cdot (xy + y^2 + 1) + (y + 0 + 0) \cdot e^{xy}$$

$$f_{xy} = f_{yx} = e^{xy} \cdot x \cdot (xy + y^2 + 1) + (x + 2y) \cdot e^{xy}$$

(11) סדר ראשון :

$$f_y(x, y) = e^{x+y} (x^2 + y^2 + 2y), \quad f_x(x, y) = e^{x+y} (x^2 + y^2 + 2x)$$

סדר שני :

$$, \quad f_{yy} = e^{x+y} \cdot (x^2 + y^2 + 2y) + (2y+2) \cdot e^{x+y}, \quad f_{xx} = e^{x+y} \cdot (x^2 + y^2 + 2x) + (2x+2) \cdot e^{x+y}$$

$$f_{xy} = f_{yx} = e^{x+y} \cdot (x^2 + y^2 + 2x) + 2y \cdot e^{x+y}$$

(12) סדר ראשון :

$$f_y(x, y) = e^{-x^2-y^2} (4y - 2x^2y - 4y^3), \quad f_x(x, y) = e^{-x^2-y^2} (2x - 2x^3 - 4xy^2)$$

סדר שני :

$$, \quad f_{xx} = e^{-x^2-y^2} (-2x) \cdot (2x - 2x^3 - 4xy^2) + (2 - 6x^2 - 4y^2) \cdot e^{-x^2-y^2}$$

$$, \quad f_{yy} = e^{-x^2-y^2} (-2y) \cdot (4y - 2x^2y - 4y^3) + (4 - 2x^2 - 12y^2) \cdot e^{-x^2-y^2}$$

$$f_{xy} = f_{yx} = e^{-x^2-y^2} (-2y) \cdot (2x - 2x^3 - 4xy^2) + (-4x \cdot 2y) \cdot e^{-x^2-y^2}$$

(13) סדר ראשון :

$$f_y(x, y) = \frac{2y}{1+x^2+y^2}, \quad f_x(x, y) = \frac{2x}{1+x^2+y^2}$$

סדר שני :

$$, \quad f_{yy} = \frac{2 \cdot (1+x^2+y^2) - 2y \cdot 2y}{(1+x^2+y^2)^2}, \quad f_{xx} = \frac{2x(1+x^2+y^2) + 2x \cdot 2x}{(1+x^2+y^2)^2}$$

$$f_{xy} = f_{yx} = \frac{0 \cdot (1+x^2+y^2) - 2y \cdot 2x}{(1+x^2+y^2)^2}$$

(14) סדר ראשון :

$$f_y(x, y) = \frac{2y}{x^2+y^2}, \quad f_x(x, y) = \frac{2x}{x^2+y^2}$$

סדר שני :

$$, \quad f_{yy} = \frac{2(x^2+y^2) - 2y \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}, \quad f_{xx} = \frac{2(x^2+y^2) - 2x \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_{xy} = f_{yx} = \frac{0(x^2+y^2) - 2y \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}$$

(15) ראה סרטון.

$$f_{xy}(1,1) = -2 \quad (16)$$

$$f_{xy}(1,1) = 1 \quad (17)$$

$$f_{xy}(1,1) = \frac{-1}{2\sqrt{2}} \quad (18)$$

(19) הוכחה.

$$f_z = 4 , f_y = -2 , f_x = -1 \quad (20)$$

$$f_{xy} = f_{yx} = -\frac{1}{4e} , f_{yy} = \frac{\frac{4}{e^2} \left(1 + \frac{1}{e}\right)}{16} , f_{xx} = \frac{1}{4} \quad (21)$$

(22) סדר ראשון :

$$f_y(x, y) = -2x^2y + 10 , f_x(x, y) = 8x - 2xy^2 + 4$$

סדר שני :

$$f_{xy} = f_{yx} = -4xy , f_{yy} = -2x^2 , f_{xx} = 8 - 2y^2$$

(23) סדר ראשון :

$$f_y(x, y) = x^4 \cdot \frac{1}{y} , f_x(x, y) = 4x^3 \ln y$$

סדר שני :

$$f_{xy} = f_{yx} = \frac{4x^3}{y} , f_{yy} = -\frac{x^4}{y^2} , f_{xx} = 12x^2 \ln y$$

(24) סדר ראשון :

$$f_z(x, y, z) = xy \cdot 1 , f_y(x, y) = xz \cdot 1 , f_x(x, y, z) = yz \cdot 1$$

סדר שני :

$$f_{yz} = x \cdot 1 , f_{xz} = y \cdot 1 , f_{xy} = f_{yx} = z \cdot 1 , f_{zz} = 0 , f_{yy} = 0 , f_{xx} = 0$$

## חדוֹא לכלכלהים

פרק 10 - קיצון ללא אילוץ - ממן 13

תוכן העניינים

1. קיצון ואוקף לפונקציה של שני משתנים ..... 59

## קיצון ואוכף לפונקציה של שני משתנים

### שאלות

עבור כל אחת מהfonקציות בשאלות 1-8, מצאו נקודות קרייטיות וסוווגו אותן למקסימום, מינימום או אוכף:

$$f(x, y) = 8x^3 + 12xy + 3y^2 - 18x \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20 \quad (2)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy + 4 \quad (3)$$

$$f(x, y) = 3x - x^3 - 2y^2 + y^4 \quad (4)$$

$$f(x, y) = e^{4y-x^2-y^2} \quad (5)$$

$$f(x, y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y \quad (6)$$

$$f(x, y) = \frac{x^2 y^2 - 8x + y}{xy} \quad (7)$$

$$f(x, y) = e^x \cos y \quad (8)$$

9) נתון משטח  $z = x^3 + y^3 - 3xy + 4$ . מצאו את משוואות המשוררים המשיקים האופקיים למשטח.

10) מבין כל התיבות הפתוחות שנפchan 32 סמ"ק, חשבו את ממדיו התיבה שטוח הפנים שלה הוא מינימלי.

11) מצאו את המרחק הקצר ביותר מהנקודה  $(1, 2, 3)$  למישור  $z = -2x - 2y + z$  וכן את הנקודה על המישור הקרוב ביותר לנקודה הנ"ל.

- (12)** יצרן מוכר מחשבוניים, בארץ ובסין.  
 עלות הייצור של מחשבון בארץ היא \$ 6 ועלות הייצור מחשבון בסין היא \$.8.  
 מנהל השיווק אומד את הביקוש  $Q_1$  למחשבון בארץ, ואת הביקוש  $Q_2$  למחשבון בסין, על ידי:  $Q_1 = 116 - 30P_1 + 20P_2$ ,  $Q_2 = 144 + 16P_1 - 24P_2$ ,  $P_1$  ו-  $P_2$ , על מנת למיקסם כיצד צריכה החנות לקבוע את מחירי המחשבוניים,  $P_1$  ו-  $P_2$ , את הרווח? מהו רוחח זה?

- (13)** נתונה הפונקציה  $f(x, y) = x^2 + y^2 + axy$ .  
 א. הוכחו שהנקודה  $(0,0)$  היא נקודת קרייטית.  
 ב. בעזרת מבחן הנגזרת השנייה, קבעו עבור אילו ערכים של  $a$  הנקודה מסעיף א' היא מקסימום, מינימום, אוכף, או שלא ניתן לדעת.

- (14)** מצאו שני מספרים,  $a > b$ , כך ש-  $\int_a^b (24 - 2x - x^2)^{\frac{1}{5}} dx$  יהיה מקסימלי.

## תשובות סופיות

- (1)** אוכף ;  $(-0.5, 1), (1.5, -3)$  מינימום.  
**(2)** מינימום ;  $(1, -2), (-1, 2)$  ; מקסימום ;  $(1, 2)$  אוכף.  
**(3)** אוכף ;  $(0, 0), (1, 1)$  מינימום.  
**(4)** אוכף.  $(-1, 0), (1, 1), (1, -1)$  ; מינימום ;  $(0, -1), (-1, 1), (-1, -1)$  מקסימום.  
**(5)** מינימום ;  $(0, 2)$  מקסימום.  
**(6)** מינימום ;  $(4, 4)$  מקסימום.  
**(7)** מינימום ;  $(-0.5, 4)$  מקסימום.  
**(8)** אין נקודות קרייטיות.  
**(9)**  $z = 4, z = 3$   
**(10)** רוחב 4 ס"מ, אורך 4 ס"מ, גובה 2 ס"מ.  
**(11)** מרחק מינימלי הוא 1 יחידות אורך. נקודה קרובה ביותר  $(1/3, 4/3)$ .  
**(12)**  $P_1 = 10\$, P_2 = 12\$$  רוחח מקסימלי \$ 288\$.  
**(13)** א. שאלת הוכחה. ב. עבור  $a = -2$ ,  $a = 2$ ,  $a < -2$ ,  $a > 2$ , לא ניתן לדעת ; אוכף ;  $a < -2, a > 2$  מינימום.  
**(14)**  $a = -6, b = 4$

# חדוֹא לכלכלהים

פרק 11 - גירה סטומה -מן 13

תוכן העניינים

1. פונקציות סטומות - הפן הטכני ..... 61

## פונקציות סתומות – הפן הטכני

### שאלות

**1)** מצאו את  $y'$ , כאשר  $x^2 + y^5 = xy + 1$   
וחשבו את  $y'(0)$ .

**2)** מצאו את  $y'$ , כאשר  $e^{xy} + x^2y^2 = 5x - 4$

**3)** מצאו את  $y''(e)$ , כאשר  $2\ln x + \ln y = 1$ ,  $y'(e)$ ,

**4)** נתון  $z = z(x, y) \geq 0$   $z^2 - e^{x^2+y^2} + (x+y)\sin z = 0$   
חשבו את  $\frac{\partial z}{\partial x}(0,0), \frac{\partial z}{\partial y}(0,0)$

**5)** נתון  $y = y(x, z) \geq 0$   $z^2 - e^{x^2+y^2} + (x+y)\sin z = -e^4$   
חשבו את  $y_x(0,0), y_z(0,0)$ .

### תשובות סופיות

$$y'(0) = \frac{1}{5} \quad \text{(1)}$$

$$y'(1) = 5 \quad \text{(2)}$$

$$y'(e) = -\frac{2}{e^2}, \quad y''(e) = \frac{6}{e^3} \quad \text{(3)}$$

$$z_x(0,0) = z_y(0,0) = -\frac{\sin 1}{2} \quad \text{(4)}$$

$$y_x(0,0) = 0, \quad y_z(0,0) = \frac{1}{2e^4} \quad \text{(5)}$$

## חדוֹא לכלכלהים

פרק 12 - קיצון עם אילוצים (כופלי לגרנץ) - מן 14

### תוכן העניינים

1. קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ ..... 62

## קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ (כופלי לגראנץ')

### שאלות

בשאלות 1-4 מצאו את המקסימום והמינימום של הפונקציות, בכפוף לאילוץ הנתון :

$$f(x, y) = x^2 + y^2; \quad 2x^2 + 3xy = 1 - 2y^2 \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^2 - y^2; \quad x^2 + y^2 = 1 \quad (2)$$

$$f(x, y) = 4x + 6y; \quad x^2 + y^2 = 13 \quad (3)$$

$$f(x, y) = x^2 y; \quad x^2 + 2y^2 = 6 \quad (4)$$

5) נתונה בעיית הקיצון  $\max_{x, y > 0} \{xy\}$  s.t.  $x + 3y = 12$ , כאשר  $x, y > 0$

- א. פתרו את הבעיה.
- ב. הביאו פתרון גרפי לבעיה.

6) נתונה בעיית הקיצון  $\max_{x, y \geq 0} \{2x + y\}$  s.t.  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 9$

- א. פתרו את הבעיה.
- ב. הביאו פתרון גרפי לבעיה.

7) מבין כל הנקודות הנמצאות על הישר  $x + 3y = 12$

מצאו את זו שמכפלת שיעוריה מקסימלי.

8) מבין כל הנקודות שעל העקומה  $2x^2 + 3xy = 1 - 2y^2$ , מצאו את הנקודות שמרחxon מראשית הצירים הוא מינימלי, ואת הנקודות שמרחxon מראשית הצירים הוא מקסימלי.

9) מצאו את המרחק הקצר ביותר מהישר  $3x - 6y + 4 = 0$

$$\text{לפרבולה } x^2 + 2xy + y^2 + 4y = 0$$

רמז : מרחק הנקודה  $(x_0, y_0)$  מהישר  $ax + by + c = 0$  הוא  $\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

**10)** מושילה קונה בשוק  $x$  ק"ג מ�פונים ו-  $y$  ק"ג עגבניות.

התועלת מצרכית הסל,  $(x, y)$ , נתונה על ידי  $u(x, y) = \ln x + \ln y$ .

מחיר ק"ג מ�פונים 1 ש"ח, וממחיר ק"ג עגבניות 2 ש"ח.

מושילה קובע לעצמו להשיג רמת תועלת 16,

והוא מעוניין להשיג זאת בעלות מינימלית.

נסחו ופתרו את בעיית מושילה.

**11)** דני קונה בשוק  $x$  ק"ג מ�פונים ו-  $y$  ק"ג עגבניות.

התועלת מצרכית הסל  $(x, y)$ , נתונה על ידי  $u(x, y) = xy$ .

מחיר ק"ג מ�פונים 1 ש"ח, וממחיר ק"ג עגבניות 3 ש"ח.

לدني תקציב של 12 ש"ח.

נסחו ופתרו את בעיית דני.

**12)** עקומת התמורה בין מגנו,  $(x)$ , ואננס,  $(y)$ , היא  $x^2 + y^2 = 13$ .

לدني תועלת  $y = 4x + 6$ .

דני מחפש את הסל (אננס, מגנו)  $= (y, x)$ , על עקומת התמורה,

המביא למקסימום את התועלת שלו מצרכית מגנו ואננס.

נסחו ופתרו את הבעיה.

**13)** ליצן פונקציית ייצור  $Q = \sqrt{k} + \sqrt{L}$ .

המקרים ליחידת  $K$  ול-  $L$  הם  $P_K = 2$ ,  $P_L = 1$ .

היצן נמצא ברמת תפוקה 100 והוא מחפש את הצירוף  $(K^*, L^*)$ ,

המביא למינימום את העלות.

נסחו את בעיית הליצן (לא לפתרור).

**14)** נתונה בעיית קיזון תחת אילוץ  $p_1x + p_2y = I$ .  $\max\{u(x, y)\}$  s.t.

תהי  $(x^*, y^*)$  נקודת הפתרון של הבעיה. ניתן להניח מצב כללי של השקעה.

הוכיחו כי כופל לגראנו  $\lambda$  מקיים  $\lambda = \frac{x \cdot u_x + y \cdot u_y}{I}$  בנקודת הפתרון של הבעיה.

### תשובות סופיות

$$\max(\pm 1, \mp 1) \quad \min\left(\pm\sqrt{1/7}, \pm\sqrt{1/7}\right) \quad \text{(1)}$$

$$\min(0, \pm 1) \quad \max(\pm 1, 0) \quad \text{(2)}$$

$$\max(2, 3) \quad \min(-2, -3) \quad \text{(3)}$$

$$\max(\pm 2, 1) \quad \min(\pm 2, -1) \quad \text{(4)}$$

$$\max(6, 2) \quad \text{(5)}$$

$$\max(9, 36) \quad \text{(6)}$$

$$(6, 2) \quad \text{(7)}$$

$$\max(\pm 1, \mp 1) \quad \min\left(\pm\sqrt{1/7}, \pm\sqrt{1/7}\right) \quad \text{(8)}$$

$$7/\sqrt{45} \quad \text{(9)}$$

$$\min(\sqrt{32}, \sqrt{8}) \quad \text{(10)}$$

$$\max(6, 2) \quad \text{(11)}$$

$$\max(2, 3) \quad \text{(12)}$$

$$\min\{2K + L\}; \quad \sqrt{K} + \sqrt{L} = 100 \quad \text{(13)}$$

**(14)** שאלת הוכחה.

# חדוֹא לכלכלהים

## פרק 13 - פונקציות הומוגניות -מן 15

### תוכן העניינים

65 .....	1. פונקציות הומוגניות
68 .....	2. משפט אוילר

## פונקציות הומוגניות

### שאלות

**בשאלות 1-3** בדקו האם הפונקציה הומוגנית ומאייזה סדר :

$$f(x, y) = x^3 \sqrt{y} + y^3 \sqrt{x} \quad (1)$$

$$h(x, y) = \frac{\ln(e^{5x})}{\sqrt[3]{ex^6 - 7y^6}} \quad (2)$$

$$f(x, y) = \ln(4^x) \cdot g\left[\frac{\sqrt{xy}}{x+7y}\right] \quad (3)$$

**4)** נתון כי  $z = f(x, y)$  פונקציה הומוגנית מסדר 3.

בדקו האם הפונקציה  $f(x, y) = \frac{x}{y^4} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x^5}} + \frac{1}{z(x, y)} - 4$  הומוגנית.  
במידה והפונקציה לא הומוגנית, השמיטו ממנה חלק,  
כך שתתקבל פונקציה הומוגנית.  
מהו סדר ההומוגניות של הפונקציה במקרה זה?

**5)** מצאו עבור איזה ערך של הפרמטר  $\alpha$ , כל אחת מהפונקציות הבאות הומוגניות.  
כמו כן, מצאו את סדר ההומוגניות עבור ה-  $\alpha$  שנמצאה.

$$f(x, y) = \frac{x^4 y + x y^\alpha}{4x + 10y} \quad \text{א.}$$

$$f(x, y) = \sqrt{\frac{y}{x}} (\ln \alpha x - \ln y) \quad \text{ב.}$$

6) בתרגיל זה נדגים את התכונה הבאה של פונקציות הומוגניות:  
אם פונקציה היא הומוגנית מסדר  $n$ , אז אם נחלק אותה ב-  $x^n$ ,

$$\text{נקבל פונקציה של } \frac{y}{x}.$$

א. הדגימו את הטענה על הפונקציות הבאות:

$$f(x, y) = x^2 - xy + 2y^2. \quad 1$$

$$f(x, y) = \sqrt{x+y}. \quad 2$$

ב. הוכחו את הטענה לעיל.

### הערה

ניסוח פורמלי של הטענה לעיל הוא:

אם פונקציה היא הומוגנית מסדר  $n$ , אז קיימת פונקציה  $(g(t))$ , כך ש-  $t = \frac{y}{x}$

$$\text{הקיימת } \frac{f(x, y)}{x^n} = g(t).$$

7) תהינה  $f$  ו-  $g$  פונקציות ב-  $n$  משתנים, והומוגניות מסדר  $r_1$  ו-  $r_2$ , בהתאם.  
קבעו, לכל אחת מהפונקציות הבאות, אם היא הומוגנית ומאייה דרגה:

$$f+g \quad \text{. א.} \quad \frac{(f)^2}{\sqrt[n]{g}} \quad \text{. ב.} \quad \frac{f}{g} \quad \text{. ג.} \quad f \cdot g \quad \text{. ד.}$$

8) נתון כי  $f$  פונקציה הומוגנית מסדר 4.

$$\text{ידוע כי } f(1, 2) = 4, f_x(1, 2) = ?$$

$$\text{חשבו את } f(2, 4), f(0.5, 1), f_x(2, 4), f_x(1.5, 3).$$

9) נתונה פונקציה  $f(x, y) = x^4 + y^2 z(x, y)$ .  
ידוע כי  $z$  פונקציה הומוגנית מסדר 2 וכי  $f(4, 10) = 1$ .

$$\text{א. חשבו את } f(2, 5).$$

$$\text{ב. ידוע כי } f_x(1, 1) = 4.$$

$$\text{חשבו את } f_x(a, a), \text{ לכל קבוע } a.$$

### תשובות סופיות

(1) הומוגנית מסדר 3.5.

(2) הומוגנית מסדר 1.

(3) הומוגנית מסדר 1.

(4) הפונקציה לא הומוגנית. על ידי השטמת חלקים מהפונקציה אפשר לקבל:

$$f(x, y) = \frac{x}{y^4} + \frac{1}{z(x, y)} \quad \text{הומוגנית מסדר } 3.$$

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x^5}} \quad \text{הומוגנית מסדר } 2.$$

$$f(x, y) = -4 \quad \text{הומוגנית מסדר 0.}$$

(5) א. עבור  $\alpha = 4$  הfungצייה homognit מסדר 4. ב. הfungnit מסדר 0 לכל  $\alpha > 0$ .

$$g(t) = \sqrt{1+t} \cdot 2 \quad g(t) = 1-t+2t^2 \quad \text{ב. הוכחה.}$$

(6) א. הfungnit מדרגה  $r_1 - r_2$ . ב. הfungnit מדרגה  $r_1 + r_2$ .

$$\cdot 2r_1 - \frac{r_2}{n} \quad \text{ג. הfungnit מדרגה}$$

ד. הfungnit מדרגה  $r_1$  רק אם  $r_1 = r_2$ . אחרת לא הfungnit.

$$f_x(2, 4) = 80, \quad f_x(1.5, 3) = 33.75, \quad f(2, 4) = 64, \quad f(0.5, 1) = \frac{1}{4} \quad (8)$$

$$f_x(a, a) = 4a^3 \quad \text{ב.} \quad f(2, 5) = \frac{1}{16} \quad \text{א.} \quad (9)$$

## משפט אוילר

### שאלות

**1)** נתונה הפונקציה  $f(x, y) = x^2 - xy + 2y^2$ .

- א. הוכיחו שהפונקציה הומוגנית ומצאו את דרגתה.
- ב. הראו שמשפט אוילר מתקיים.

**2)** ענו על הסעיפים הבאים :

- א. נניח ש-  $f(x, y) = f(y)$  הומוגנית מסדר 0.

$$\frac{f_x}{f_y} = -\frac{y}{x}$$

$$\cdot f(x, y) = \frac{e^y(x+y)}{(x-y)(\ln x - \ln y)}$$

$$\text{הוכיחו כי } x \cdot f_x = -y \cdot f_y$$

**3)** ענו על הסעיפים הבאים :

- א. הוכיחו כי פונקציית התועלת  $u(x, y) = \left(\frac{1}{2}x^m + \frac{1}{2}y^m\right)^{1/m}$  הומוגנית.

הניחו כי  $m$  קבוע חיובי.

- ב. הוכיחו, ללא חישוב ישיר של הנגזרות, כי  $u_y(a, a) = u_y(1, 1)$ .

- ג. הוכיחו, ללא חישוב ישיר של הנגזרות, כי  $1 = u_x(2, 2) + u_y(1, 1)$ .

**4)** תהי  $f$  פונקציה הומוגנית מסדר 2,

$$\cdot h(x, y) = x^2 - y^2 + f\left(\frac{x^2}{y}, \frac{y^2}{x}\right)$$

- א. הוכיחו כי  $h$  הומוגנית מסדר 2.

- ב. נתון :  $f(8, 1) = 16$ ,  $h_x(6, 3) = 9$

- מצאו את  $h_y(2, 1)$  ואת  $h(2, 1)$

5)  $f$  ו-  $g$  הין פונקציות הומוגניות מסדר 2 ו-10, בהתאם. נגידר:

$$f(x, y) = (x+y)h(x, y) + \frac{\sqrt{g(x, y)}}{x^2 + y^2}$$

א. הוכיחו כי  $f$  הומוגנית מסדר 3.

ב. נתון:  $f'_x(2, 16) = 12$ ,  $f'_y(1, 8) = 3$ ,  $h(4, 32) = 16$

מצאו את  $f(1, 8)$  ואת  $g(1, 8)$

6)  $f$  הומוגנית מסדר 4,  $g$  הומוגנית מסדר 2 ו-  $h$  הומוגנית מסדר 0.

נגידר פונקציה  $p(x, y) = f(x, y) + g(x, y) - h(x, y)$

נתון:  $f'_x(2, 4) = 64$ ,  $f'_y(-1, -2) = -4$ ,  $h\left(\frac{1}{2}, 1\right) = \frac{5}{2}$ ,  $p(1, 2) = \frac{7}{2}$

חשבו את  $g\left(\frac{1}{2}, 1\right)$

7) הפונקציה  $f(x, y)$  הומוגנית מסדר 3. הנתונים בشرطוט.

א. מצאו את שיעורי הנקודה B.

ב. מצאו את ערך הסכום  $f'_x(4, 8) + 2f'_y(4, 8)$

ג. נגידר פונקציה חדשה  $u(x, y)$

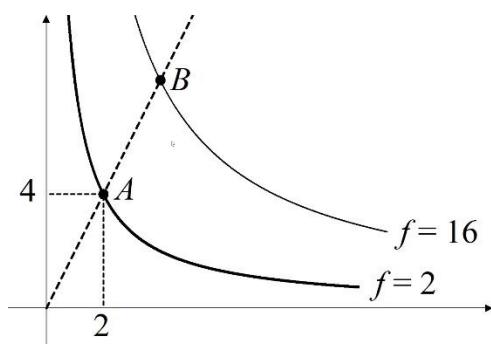
$$u(x, y) = (f(x, y))^2$$

1. לפי כללי הגזירה, מתקיים  $u'_x(x, y) = 2 \cdot f(x, y) \cdot f'_x(x, y)$

הסבירו זאת בקצרה.

2. הוכיחו כי  $x \cdot u'_x(x, y) + y \cdot u'_y(x, y) = 6(f(x, y))^2$

היעזרו בסעיף הקודם ובנתונים על  $f$



8) תהי  $f(x, y)$  פונקציה הומוגנית מסדר  $m$ ,

$$\text{המקיימת } f(2,1) = 27 \text{ ו- } f(6,3) = 243.$$

א. מצאו את סדר ההומוגניות,  $m$ .

ב. בנקודה  $(2,1)$  עוברתعش"ע של  $f$ .

העבירות משיק לעש"ע בנקודה הניל.

$$\text{המשיק הוא } 2x + 3y = 7.$$

מצאו את  $f_x(2,1)$ ,  $f_y(2,1)$ ,  $f_x(1,0.5)$

9) תהי  $(t) g$  פונקציה של משתנה אחד.

על הפונקציה  $g$  ידוע, כי  $g(4) = 5$ ,  $g(1) = 3$ ,  $g'(8) = 2$

$$\text{המשתנה } t \text{ תלוי במשתנים החזיביים } (x, y), \text{ כך: } t = \frac{4y}{x}.$$

נגידר תועלת  $u$  כפונקציה של המשתנים  $(x, y)$ , באופן הבא:

$$u(x, y) = g(t) = g\left(\frac{4y}{x}\right)$$

א. באյור שלහלן קרו עם שיפוע 1.

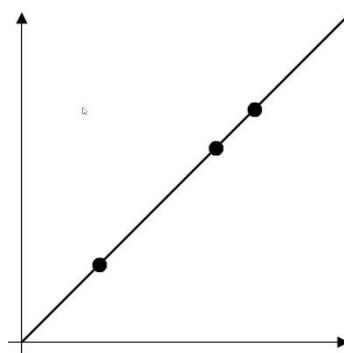
מה הערך של התועלת בנקודות המסומנות על הקרכן?

ב. הוכחו כי  $\frac{\partial u}{\partial x}(0, -4) = -4$  היא עקומת אדישות של התועלת.

ציירו את הקרכן הזאת ורשמו באյור מה הערך של התועלת.

ג. הוכחו כי התועלת היא פונקציה הומוגנית. מהו סדר ההומוגניות?

ד. הוכחו כי  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(1, 2) = -16$ .



10) נניח ש- $f(x, y) = f(x)$  הומוגנית מסדר 1.

$$\text{הוכחו כי } x^2 f_{xx} + 2xyf_{xy} + y^2 f_{yy} = 0$$

**11)** הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

- א. אם  $f_x(x, y)$  הומוגנית מסדר 4, אז  $f(x, y)$  הומוגנית מסדר 5.  
 ב. אם פונקציה  $f(x, y)$  מקיימת  $f(2, 4) = 2^3 f(1, 2)$ , אז הפונקציה הומוגנית מסדר 3.

תשובות סופיות

- (1) שאלת הוכחה.

(2) שאלת הוכחה.

(3) שאלת הוכחה.

(4) א. שאלת הוכחה.  $h_y(2,1)=8$      $h(2,1)=4$     ב.

(5) א. שאלת הוכחה.  $f(1,8)=9$ ,     $g(1,8)=0$     ב.

(6)  $-\frac{3}{4}$

(7) א.  $B(4,8)$ .    ב. 12    ג. שאלת הוכחה והסביר.

(8) א. 2    ב.  $\frac{54}{7}$ .    ג.  $f_y(2,1)=\frac{3}{2}\left(\frac{108}{7}\right)$

(9) א. 5    ב-ד. שאלות הוכחה.

(10) שאלת הוכחה.

(11) א. הטענה אינה נכונה.    ב. הטענה אינה נכונה.

# חדוֹא לכלכלהים

פרק 14 - אינטגרלים -מן 15

תוכן העניינים

72 .....	1. אינטגרלים מיידיים .....
75 .....	2. מציאת פונקציה קדומה .....

## אינטגרלים מיידיים

### שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות 1-12 (פתרונות על ידי הכלל :  $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ )

$$\int \frac{1}{x^2} dx \quad (3)$$

$$\int x^4 dx \quad (2)$$

$$\int 4dx \quad (1)$$

$$\int 4x^{10} dx \quad (6)$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x}} dx \quad (5)$$

$$\int \sqrt{x} dx \quad (4)$$

$$\int (x^2 + 1)^2 dx \quad (9)$$

$$\int \left( \frac{3}{x^4} + 2\sqrt[3]{x} \right) dx \quad (8)$$

$$\int (2x^2 - x + 1) dx \quad (7)$$

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx \quad (12)$$

$$\int \frac{1+2x^2+x^4}{x^2} dx \quad (11)$$

$$\int (x^2 + 1)(x + 2) dx \quad (10)$$

חשבו את האינטגרלים בשאלות 13-20 :

(פתרונות על ידי הכלל :  $\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a \cdot (n+1)} + c$ )

$$\int \frac{4}{(x-2)^5} dx \quad (15)$$

$$\int (x^2 - 2x + 1)^{10} dx \quad (14)$$

$$\int (4x+1)^{10} dx \quad (13)$$

$$\int \frac{x}{(x-1)^4} dx \quad (18)$$

$$\int \frac{10}{\sqrt{2x+4}} dx \quad (17)$$

$$\int \sqrt[3]{4x-10} dx \quad (16)$$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}+1} \quad (20)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x}} \quad (19)$$

חשבו את האינטגרלים בשאלות 21-26 :

(פתרונות על ידי הכלל :  $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{\ln|ax+b|}{a} + c$ )

$$\int \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^2 dx \quad (23)$$

$$\int \frac{1+x+x^2}{x} dx \quad (22)$$

$$\int \frac{1}{4x} dx \quad (21)$$

$$\int \frac{4x+1}{x+2} dx \quad (26)$$

$$\int \frac{x+3}{x+2} dx \quad (25)$$

$$\int \frac{1}{4x-1} dx \quad (24)$$

חשבו את האינטגרלים בשאלות 29-27 :

$$\left( \int e^{ax+b} dx = \frac{e^{ax+b}}{a} + c \right) \text{ (פתרה על ידי הכלל :)}$$

$$\int \left( 4\sqrt{e^x} + \frac{1}{\sqrt[3]{e^{4x}}} \right) dx \quad (29)$$

$$\int (e^{x+1})^2 dx \quad (28)$$

$$\int (e^{4x} + e^{-x}) dx \quad (27)$$

$$(30) \text{ חשבו את האינטגרל : } \int \frac{2^x + 4^{2x} + 10^{3x}}{5^x} dx$$

$$\left( \int a^{mx+n} dx = \frac{a^{mx+n}}{m \ln a} + c \right) \text{ (פתרה על ידי הכלל :)}$$

חשבו את האינטגרלים בשאלות 33-31 :

$$\int \frac{x^2}{1-x^2} dx \quad (33)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx \quad (32)$$

$$\int \frac{1}{1+4x^2} dx \quad (31)$$

### תשובות סופיות

$$-\frac{1}{x} + c \quad (3)$$

$$\frac{x^5}{5} + c \quad (2)$$

$$4x + c \quad (1)$$

$$\frac{4x^{11}}{11} + c \quad (6)$$

$$-\frac{2}{\sqrt{x}} + c \quad (5)$$

$$\frac{x^{1.5}}{1.5} + c \quad (4)$$

$$\frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x + c \quad (9)$$

$$-\frac{1}{x^3} + \frac{3\sqrt[3]{x^4}}{2} + c \quad (8)$$

$$\frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + c \quad (7)$$

$$\frac{x^{1.5}}{1.5} + \frac{x^{0.5}}{0.5} + c \quad (12)$$

$$-\frac{1}{x} + 2x + \frac{x^3}{3} + c \quad (11)$$

$$\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x + c \quad (10)$$

$$-\frac{1}{(x-2)^4} + c \quad (15)$$

$$\frac{(x-1)^{21}}{21} + c \quad (14)$$

$$\frac{(4x+11)^{11}}{44} + c \quad (13)$$

$$10\sqrt{2x+4} + c \quad (17)$$

$$\frac{3}{16}\sqrt[3]{(4x-10)^4} + c \quad (16)$$

$$-\frac{2}{3}\left((x-1)^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{3}{2}}\right) + c \quad (19)$$

$$-\frac{1}{2(x-1)^2} - \frac{1}{3(x-1)^3} + c \quad (18)$$

$$\ln|x| + x + \frac{x^2}{2} + c \quad (22)$$

$$\frac{\ln|x|}{4} + c \quad (21)$$

$$\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} - x + c \quad (20)$$

$$x + \ln|x+2| + c \quad (25)$$

$$\frac{\ln|4x-1|}{4} + c \quad (24)$$

$$x + 2\ln|x| - \frac{1}{x} + c \quad (23)$$

$$\frac{e^{2x+2}}{2} + c \quad (28)$$

$$\frac{e^{4x}}{4} - e^{-x} + c \quad (27)$$

$$4(x - 1.75\ln|x+2|) + c \quad (26)$$

$$\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^x}{\ln\left(\frac{2}{5}\right)} + \frac{\left(\frac{16}{5}\right)^x}{\ln\left(\frac{16}{5}\right)} + \frac{\left(200\right)^x}{\ln(200)} + c \quad (30)$$

$$8e^{\frac{x}{2}} - \frac{3e^{\frac{-4x}{3}}}{4} + c \quad (29)$$

$$-\left(x - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right) + c \quad (33)$$

$$\arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + c \quad (32)$$

$$\frac{1}{2}\arctan(2x) + c \quad (31)$$

## מציאת פונקציה קדומה

### שאלות

1) נתונה הנגזרת הבאה :  $f'(x) = 2x - \sqrt[3]{4x}$ .

ידוע כי הפונקציה עוברת בנקודה  $(2, 3)$ .  
מצאו את הפונקציה.

2) נתונה הנגזרת הבאה :  $f'(x) = \sqrt[3]{5x+7}$ .

ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה-  $x$  בנקודה שבה  $x=4$ .  
מצאו את הפונקציה.

3) נתונה הנגזרת הבאה :  $f'(x) = \frac{10}{\sqrt[5]{x+1}} + (x-1)^2$ .

ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה-  $y$  בנקודה שבה  $y=-6$ .  
מצאו את הפונקציה.

4) נתונה נגזרת של פונקציה :  $f'(x) = 2x - 6$ .

ערך הפונקציה בנקודת הקיצון שלה הוא 5.  
מצאו את הפונקציה.

5) נתונה נגזרת של פונקציה :  $f'(x) = \sqrt{x+2} - \sqrt{x-1} + 2$ .

שיעור המשיק לפונקציה, בנקודה שבה  $y=5\frac{2}{3}$ , הוא 3.  
מצאו את הפונקציה.

6) נתונה הנגזרת השנייה של פונקציה :  $f''(x) = 6x + 6$ .

שיעור הפונקציה בנקודת הפיתול שלה הוא  $-12$ ,  
וערך הפונקציה בנקודה זו הוא 1.  
מצאו את הפונקציה.

7) נתונה הנגזרת השנייה של פונקציה :  $f''(x) = 1 + \frac{8}{x^3}$ .

השיעור לפונקציה בנקודת הפיתול שלה הוא הישר  $y=-4$ .  
מצאו את הפונקציה.

- 8) נתונה פונקציה  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  המקיימת  $f(0) = 0$ ,  
 ונתנו בנוספּה כי לכל  $x_0$  ממשי:  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = |x_0|$
- מצאו את תחומי הרציפות של הפונקציה.
  - חשבו את הגבול הבא או קבעו שהוא אינו קיים  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .
  - מצאו כמה נקודות חיתוך יש לגרף הפונקציה עם ציר ה- $x$ .
  - מצאו את כל נקודות הפיתול של הפונקציה.
  - תהי  $G(x)$  פונקציה קדומה של  $|x|$ .  
 חשבו את הנגזרת  $'(G(x) - f(x))$ .

### תשובות סופיות

$$f(x) = x^2 - \frac{3}{16}\sqrt[3]{(4x)^4} + 2 \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{3}{20}\sqrt[3]{(5x+7)^4} - 12\frac{3}{20} \quad (2)$$

$$f(x) = 12\frac{1}{2}\sqrt[5]{(x+1)^4} + \frac{1}{3}(x-1)^3 - 18\frac{1}{6} \quad (3)$$

$$f(x) = x^2 - 6x + 14 \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{(x+2)^3} - \frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3} + 2x - 3 \quad (5)$$

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 10 \quad (6)$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{4}{x} + 3x + 2 \quad (7)$$

8) ג. נקודת חיתוך אחת  $(0,0)$ .      ב.  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ .

ה. 0      ד. נקודת פיתול אחת  $(0,0)$ .

## חדוֹא לכלכלהים

### פרק 15 - המשך אינטגרלים - ממן 15

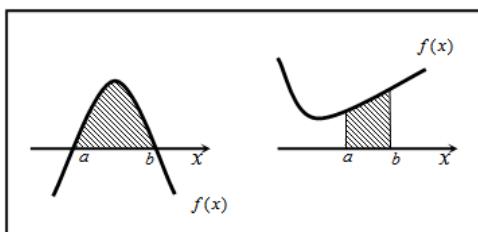
#### תוכן העניינים

77 .....	1. חישוב שטחים .....
97 .....	2. חישוב שטחים ביחס לציר ה-y .....
98 .....	3. אורך קשת .....

## чисוב שטחים

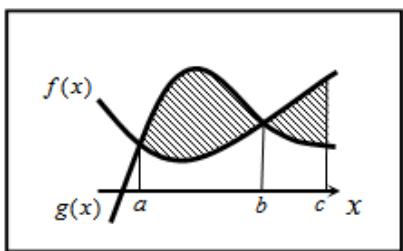
### чисוב שטחים באמצעות אינטגרל (מקרים פרטיים)

1. שטח הכלוא בין גרף פונקציה וציר ה- $x$ :



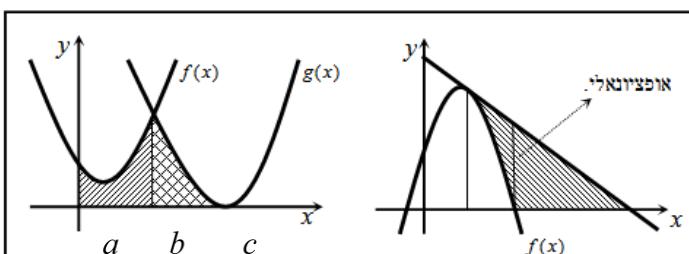
$$S = \int_a^b f(x) dx$$

2. שטח הכלוא בין שני גרפים, כך שגרף אחד כולה מעל השני:

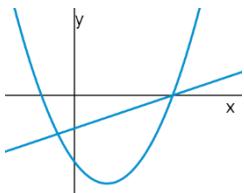


$$\begin{aligned} S_1 &= \int_a^b (g(x) - f(x)) dx \\ S_2 &= \int_b^c (f(x) - g(x)) dx \\ S &= S_1 + S_2 \end{aligned}$$

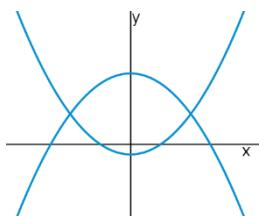
3. שטח הכלוא בין שני גרפים וציר ה- $x$ :



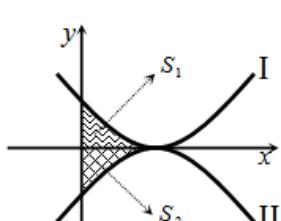
$$S = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c g(x) dx$$

**שאלות**

- 1) נתונות הפונקציות  $f(x) = x^2 - 4x - 12$  ו-  $g(x) = x - 6$ .  
 חשבו את גודל השטח הכלוא בין הגרפים של  $f$  ו-  $g$ .

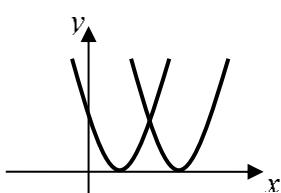


- 2) נתונות הפונקציות  $f(x) = x^2 - 1$ ,  $g(x) = 7 - x^2$ .  
 חשבו את גודל השטח הכלוא בין הגרפים של  $f$  ו-  $g$ .

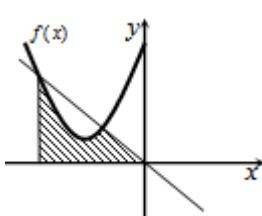


- 3) נתונות הפונקציות  $f(x) = (x-2)^2$  ו-  $g(x) = -(x-2)^2$ ,  
 כמתואר באיוור.

- א. התאימו בין הפונקציות לגרפים I ו-II.  
 ב. נסמן את השטחים שבין כל פונקציה והצירים  
 ב-  $S_1$  ו-  $S_2$ , כמתואר באיוור.  
 הראו כי השטחים  $S_1$  ו-  $S_2$  שווים זה לזה.

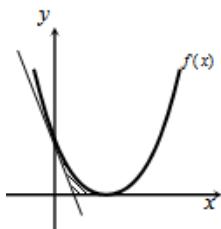


- 4) נתונות הפונקציות  $f(x) = x^2 - 2x + 1$ ,  $g(x) = x^2 - 6x + 9$ .  
 חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות ובין ציר ה-  $x$ .

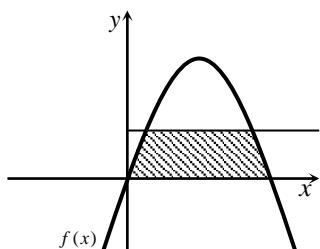


- 5) נתונה הפונקציה  $f(x) = x^2 + 6x + 12$ .  
 ישר העובר בראשית הצירים חותך את גרף הפונקציה  
 בנקודת שבה  $x = -4$ , כמתואר באיוור.

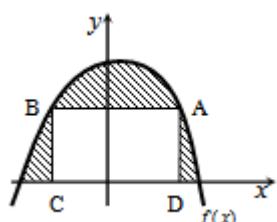
- א. מצאו את משוואת הישר.  
 ב. מצאו את נקודת החיתוך השנייה של הישר והפונקציה.  
 ג. מצאו את השטח המוגבל בין הישר, גרף הפונקציה, ציר ה-  $x$  והישר  $x = -4$ .



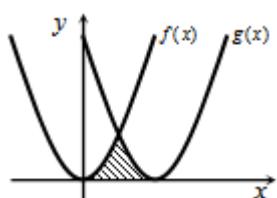
- 6) נתונה הפונקציה  $f(x) = (x-2)^2$ .  
 בנקודות החיתוך שלה עם ציר ה- $y$  נעביר משיק.  
 א. מצאו את משוואת המשיק.  
 ב. מצאו את נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- $x$ .  
 ג. חשבו את השטח הכלוא בין המשיק, גרף הפונקציה וציר ה- $x$  (השטח המסומן).



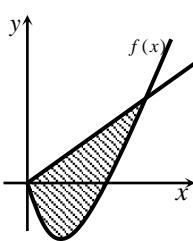
- 7) נתונה הפונקציה  $f(x) = kx - x^2$ .  
 הישר  $y = 9$  חותך את גרף הפונקציה בשתי נקודות.  
 ידוע כי שיעור ה- $x$  של אחת מנקודות אלה הוא  $9 = x$ .  
 א. מצאו את ערך הפרמטר  $k$ .  
 ב. מצאו את נקודת החיתוך השנייה בין שני הגרפים.  
 ג. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, הישר וציר ה- $x$  (השטח המסומן).



- 8) הנגזרת של הפונקציה  $f(x)$ , המתווארת באיוור שלහלן,  
 היא  $y = 3 - 2x$ . ישר  $AB$ , שמשוואתו  $6 = x$ .  
 חותך את גרף הפונקציה  $f(x)$  בנקודות  $A$  ו- $B$ .  
 מנקודות אלו מורידים אנכים לציר ה- $x$ ,  
 כך שנוצר מלבן  $ABCD$ .  
 ידועSSH ששיעור ה- $x$  של הנקודה  $A$  הוא  $4 = x$ .  
 א. מצאו את הפונקציה  $f(x)$ .  
 ב. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המלבן וציר ה- $x$  (השטח המסומן).

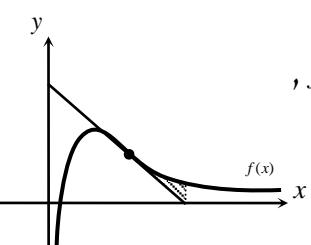


- 9) באיוור שלහלן חותך גרף הפונקציה  $f(x) = x^2$  את גרף הפונקציה  $g(x)$ , בנקודת שבה  $x = 2$ .  
 הנגזרת של הפונקציה  $g(x)$  היא  $g'(x) = 2x - 8$ .  
 א. מצאו את הפונקציה  $g(x)$ .  
 ב. חשבו את השטח הכלוא בין שני הגרפים וציר ה- $x$  (השטח המסומן).

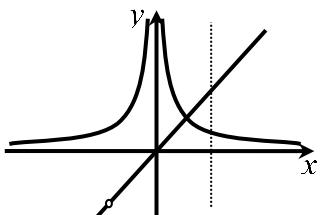


- . 10) באյור שלහלן מתוארים גראף הפונקציה  $f(x)$  והישר  $x$ .  $y = 2x$  נגזרת הפונקציה  $f(x)$  היא  $f'(x) = 2x - 6$ .  
וידוע כי הישר חותך את הפונקציה בנקודת שבה ערך ה-  $y = 16$  הוא  $x = 8$ .  
א. מצאו את הפונקציה  $f(x)$ .

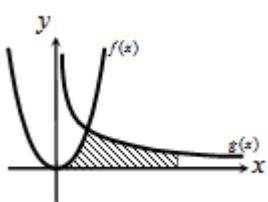
- ב. האם יש לגרף הפונקציה ולישר עוד נקודות חיתוך? אם כן, מצאו אותן.  
ג. חשבו את השטח המוגבל בין גראף הפונקציה והישר.



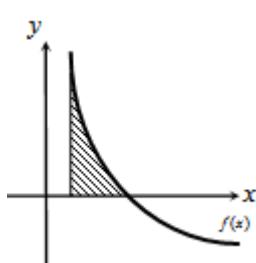
- . 11) ענו על הסעיפים הבאים:  
א. מבין כל המשיקים לגרף הפונקציה  $f(x) = \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3}$  מצאו את משוואת המשיק ששיפועו מינימלי.  
ב. באյור שלහלן מתוארים הגרפים של הפונקציה והמשיק שמצוות בסעיף א'.  
חשבו את השטח הכלוא בין גראף הפונקציה, המשיק, ואנד לציר ה-  $x$ , היוצא מנקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה-  $x$ .



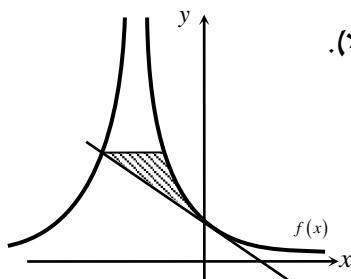
- . 12) נתונות שתי פונקציות  $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ,  $g(x) = \frac{x^2 + 2x}{x+2}$ .  
חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות, הישר  $x = 2$  וציר ה-  $x$ .



- . 13) באյור שלහלן מתוארים הגרפים של הפונקציות  $f(x) = 2x^2$  ו-  $g(x) = \frac{a}{x^2}$  ( $a$  קבוע), בתחום  $x > 0$ .  
ידוע כי הגרפים נחתכים בריבוע הראשון, בנקודת הנמצאת על הישר  $y = 4x$ .  
א. מצאו את נקודת החיתוך של הגרפים ואת  $a$ .  
ב. חשבו את השטח המוגבל בין שני הגרפים, ציר ה-  $x$  והישר  $y = 4x$ .



- . 14) גראף הפונקציה  $f(x) = \frac{a-x^2}{x^2}$  ( $a$  קבוע)  
חותך את ציר ה-  $x$  בנקודת  $(6,0)$ .  
א. מצאו את  $a$  וכתבו את הפונקציה.  
ב. חשבו את השטח המוגבל בין גראף הפונקציה, ציר ה-  $x$  והישר  $x = 2$ .



15) נתונה הפונקציה  $A$  )  $f(x) = \frac{A}{(2x+A)^2}$  פרמטר חיובי.

ידעו כי שיפוע הפונקציה בנקודות החיתוך שלה עם ציר ה- $y$ , הוא  $-\frac{1}{9}$ .

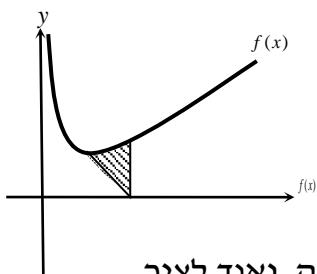
א. מצאו את ערך הפרמטר  $A$ .

ב. כתבו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודות החיתוך עם ציר ה- $y$ .

ג. הראו כי המשיק חותך את גרף הפונקציה בנקודה שבה  $x = -4.5$ .

ד. העבירו ישר אופקי מנקודות החיתוך של המשיק וגרף הפונקציה מהסעיף הקודם, ומצאו את נקודות החיתוך הנוספת של ישר זה עם גרף הפונקציה.

ה. חשבו את השטח הכלוא בין המשיק, הישר וגרף הפונקציה (היעזרו באיוור).

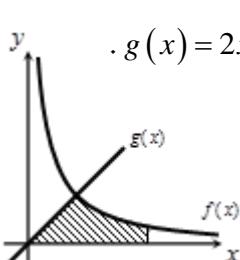


16) באיוור שלහלן נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}} + x$ .

א. מצאו את נקודות המינימום שלה.

ב. מנקודות המינימום של הפונקציה נعبر ישר לנקודה  $(2,0)$ , שעל ציר ה- $x$ .

מצאו את השטח הכלוא בין ישר זה, גרף הפונקציה, ואנך לציר ה- $x$ , היוצא מנקודה  $(2,0)$  עד לנקודות החיתוך עם גרף הפונקציה.



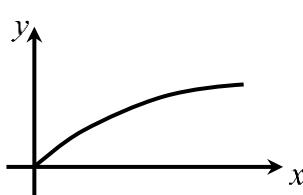
17) באיוור הבא מתוארים גרפים של הפונקציות  $g(x) = 2x$  ו-  $f(x) = \frac{16}{\sqrt{x}}$ .

א. מצאו את נקודות החיתוך של הגрафים.

ב. חשבו את השטח המוגבל בין שני הגראפים, ציר ה- $x$  והישר  $x = 9$ .

18) נתונה הפונקציה  $f(x) = (x-6)\sqrt{x}$ .

חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק לפונקציה בנקודות המינימום שלה וציר ה- $y$ .



19) נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$  בריבוע הראשון.

לפונקציה העבירו משיק העובר בראשית הצירים.

חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק והישר  $\sqrt{3} = x$ .

20) באיוור שלහן מתואר גרף הפונקציה  $f(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$ .

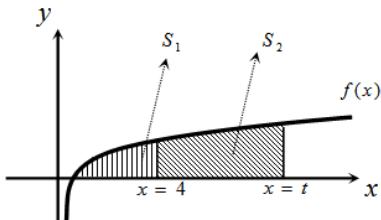
נעביר שני אנכים לציר ה- $x$ ,  $x=4$  ו-  $x=t$  (כאשר  $t > 4$ ).

נסמן את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה- $x$  ב-  $S_1$ ,

ואת השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר ה- $x$  והאנכים ב-  $S_2$ .

ידעו כי  $S_2 = 8S_1$ .

מצאו את  $t$ .



21) נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{x\sqrt{x}-8}{\sqrt{x}}$

א. ענו על הסעיפים הבאים:

1. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.

2. מצאו את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$ .

3. הראו כי הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה.

ב. נעביר משיק לגרף הפונקציה שシפוועו הוא  $\frac{17}{16}m$ .

מצאו את נקודת ההשקה.

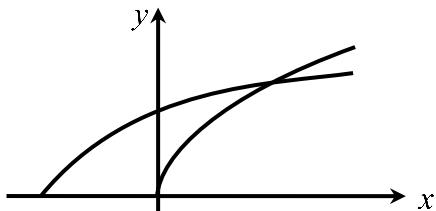
ג. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר ה- $x$  ואנך לציר ה- $x$  מנוקודת ההשקה שמצויה בסעיף הקודם.

22) נתונות שתי פונקציות  $f(x) = \sqrt{x+b}$ ,  $g(x) = \sqrt{2x}$ , כאשר ( $b > 0$ )

גודל השטח הכלוא בין הפונקציות

ציר ה- $x$  הוא  $\frac{2}{3}$  יחידות שטח.

מצאו את ערכו של הפרמטר  $b$ .



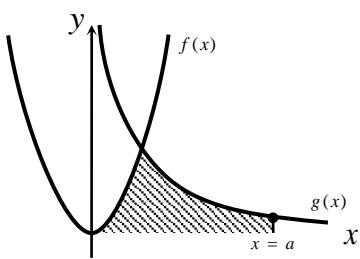
23) באיוור שלහן מתוארים גרפים של הפונקציות  $f(x) = x^2$  ו-  $g(x) = \frac{32}{\sqrt{x}}$

בריבוע הראשון.

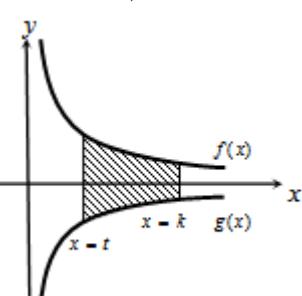
נעביר ישר  $x=a$ , החותך את גרף הפונקציה  $g(x)$  וyoצער את השטח הכלוא בין שני הגרפים, ציר ה- $x$  והישר (השטח המסומן).

ידעו כי שטח זה שווה ל-  $S = \frac{1}{3}85$ .

מצאו את  $a$ .



24) באIOR שלහן מתוארים הגרפים של הפונקציות  $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x}}$  ו-  $g(x) = -\frac{3}{\sqrt{x}}$  ו-  $x = t$ , אשר חותכים את הגרפים של הפונקציות

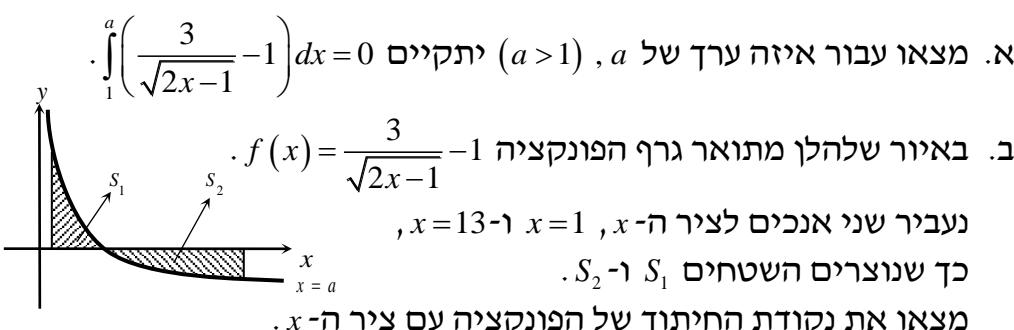


ונוצרים את הקטעים AB ו-CD. ידוע כי  $AB = 2CD$ .

א. הראו כי  $k = 4t$ .

ב. השטח הכלוא בין הפונקציות  
לבין הישרים  $x = t$  ו-  $x = k$ , הוא  $S = 12$ .  
מצאו את  $t$ .

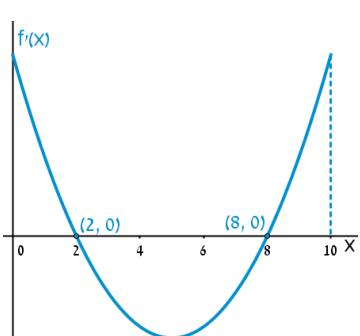
25) ענו על הטעיפים הבאים:



א. מצאו עבור איזה ערך של  $a$  (  $a > 1$  ) יתקיים

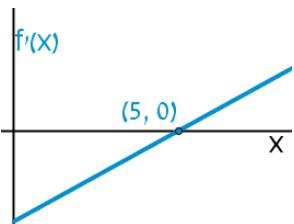
1. חשבו את השטח הכלוא בין גраф הפונקציה,  
ציר ה-  $x$  והאנך  $x = 1$ , כולל את  $S_1$ .
2. היעזרו בתוצאה שהתקבלה בסעיף א' וקבעו כמה שווה השטח  $S_2$ . נמקו.

26) הפונקציה  $f(x)$  מוגדרת בתחום  $0 \leq x \leq 10$  בציור מתואר גראfnegzert(x).

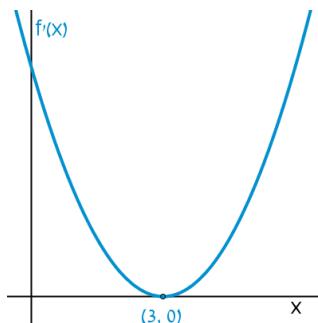


א. שרטטו סקיצה של גראfnegzert(x),  
 $f(5) = 0$ ,  $f(0) = -4$ ,  $f(2) = 6$   
אם  $f(10) > 0$

ב. חשבו את השטח המוגבל עליי גראfnegzert(x) והצירים  
בריבוע הראשון, עד לנקודה שבה  $x = 2$ .

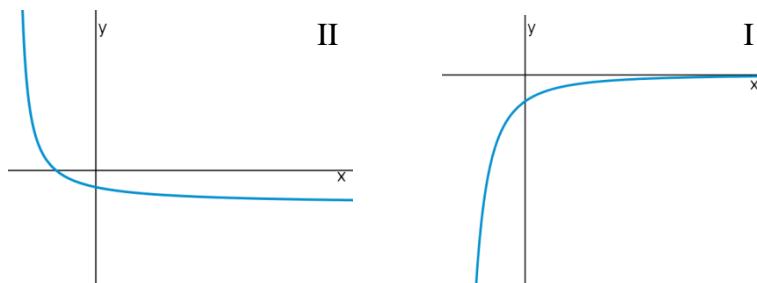


- 27) להלן גרף הפונקציה  $f'(x)$ , אשר חותך את ציר ה- $x$  בנקודה אחת בלבד,  $(5,0)$ .
- מצאו את התחומים שבהם  $f'(x)$  חיובית, ואת התחומים שבהם היא שלילית.
  - קבעו מהם תחומי העליה והירידה של הפונקציה  $f(x)$ .
  - כתבו את נקודת הקיצון של הפונקציה  $f(x)$ , אם ידוע כי שיעור ה- $y$  שלו הוא  $-2$ .
  - שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ , אם ידוע כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה- $y$  כאשר  $y = 8$ .
  - חשבו את השטח הכלוא בין גרף הנגזרת  $f'(x)$  והצירים.



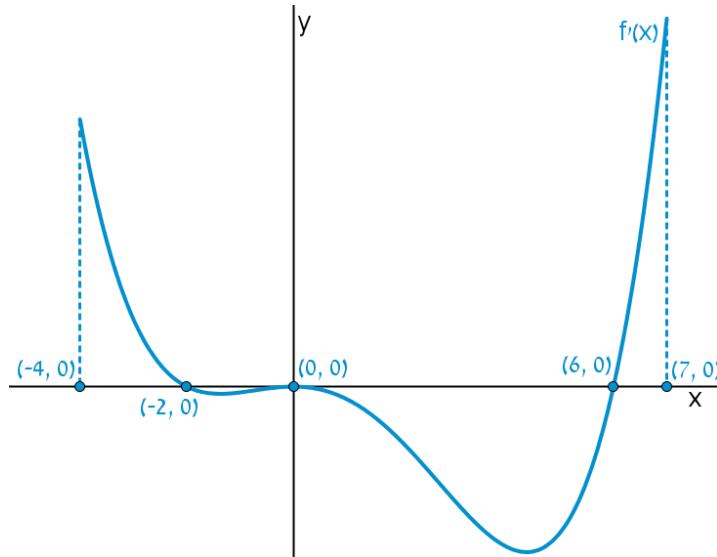
- 28) באIOR שלහלן מתוארכות הנגזרת  $f'(x)$ .
- האם לפונקציה  $f(x)$  יש נקודות קיצון? נמקו.
  - שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ , אם ידוע כי  $f(3) = 4$ , וכי היא חותכת את ציר ה- $y$  בנקודה שבה  $y = -5$ .
  - חשבו את השטח הכלוא בין גרף הנגזרת  $f'(x)$  והצירים בריבוע הראשון.

29) באIORים שלහלן מתוארים גרפים של הפונקציות  $f(x)$  ו- $f'(x)$ :



- א. זהו איזה גרף שייך לאיזו פונקציה ונמקו.  
 ב. נתון  $f(10) = -3$ , וכי  $f'(x)$  חותכת את ציר ה- $y$  בנקודה שבה  $y = -2$ . מהו השטח המוגבל בין גרף הנגזרת  $f'(x)$ , הצירים והישר  $x = 10$ ?

30) נתון גרף הנגזרת  $f'(x)$

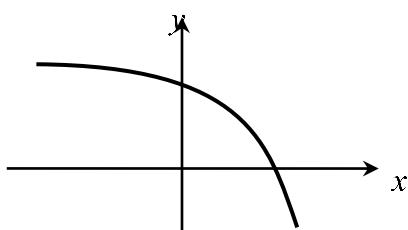


- א. שרטטו את גרף הפונקציה  $f(x)$  בתחום  $-4 \leq x \leq 7$ ,  
 לפי הנתונים  $f(-2) = 7.6$ ,  $f(0) = -2$ ,  $f(6) = -606.8$ .
- ב. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הנגזרת לציר ה- $x$  בריבוע השלישי.
- ג. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הנגזרת לציר ה- $x$  בריבוע הרביעי.

## פונקציות מעריכיות

### אינטגרלים מיידים של פונקציות מעריכיות

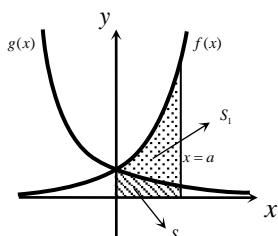
אינטגרלים יסודים	אינטגרלים של פונקציות מורכבות
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$	$\int a^{mx+n} dx = \frac{a^{mx+n}}{m \cdot \ln a} + c$
$\int e^x dx = e^x + c$	$\int e^{mx+n} dx = \frac{e^{mx+n}}{m} + c$



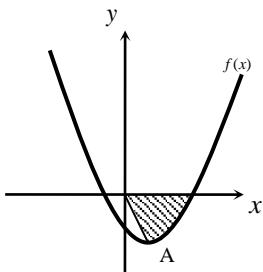
31) נתונה הפונקציה  $f(x) = 5 - e^x$ .  
 העבירו לפונקציה משיק ששייפועו  $-e$ .  
 חשבו את גודל השטח הכלוא בין  
 הפונקציה, המשיק וציר ה- $x$ .  
 ניתן להשאיר  $e$  ו- $\ln$  בתשובה.

32) נתונה הפונקציה  $f(x) = e^{bx}$ , כאשר  $0 > b$ .  
 גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק לפונקציה העובר בראשית הצירים  
 וציר ה- $y$  הוא  $\frac{e-2}{4}$ .  
 מצאו את ערכו של הפרמטר  $b$ .

33) נתונות הפונקציות  $f(x) = e^{\frac{1}{2}x}$  ו-  $g(x) = e^{-x}$ .  
 מנוקודה הנמצאת על גרף הפונקציה  $(x, g)$  בربיע הראשון הורידו אנך לשני  
 הצירים. המשך האנד לציר ה- $y$  חותך את הפונקציה  $f(x)$ ,  
 ומנקודות החיתוך יורד אנך נוסף לציר ה- $x$ , כך שנוצר מלבן.  
 הוכיחו כי שטחו המקסימלי של מלבן כזה הוא  $\frac{3}{e}$ .



34) באIOR שלහן מתוארים גרפים של הפונקציות  
 $f(x) = e^{2x}$  ו-  $g(x) = e^{-2x}$ .  
 נעביר אנך לציר ה- $x$  את הישר  $a = x$ ,  
 כאשר  $0 > a$ , כמתואר באIOR.  
 אנך זה יוצר את השטחים  $S_1$  ו-  $S_2$ .  
 ידוע כי השטח  $S_1$  גדול פי 3 מהשטח  $S_2$ .  
 מצאו את  $a$ .



35) נתונה הפונקציה  $f(x) = e^{2x-1} - 2ex - 2$ .

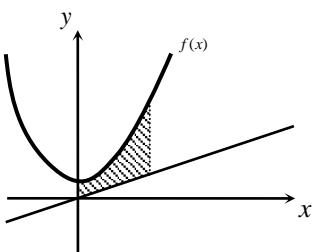
הנקודה A היא נקודת המינימום של הפונקציה.

א. מצאו את שיעורי הנקודה A.

מחברים את הנקודה A עם ראשית הצירים.

ב. כתבו את המשוואת הישר המחבר את הנקודה A עם הראשית.

ג. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, הישר וציר ה- $x$ , אם ידוע כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה- $x$  בנקודה שבה  $x = 1.7$ .



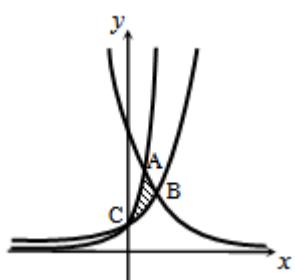
36) נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{e^x + e^{ax}}{4}$

ידוע כי הפונקציה עוברת דרך הנקודה  $\left(1, \frac{e^3+1}{4e^2}\right)$ .

א. מצאו את  $a$  וכתבו את הפונקציה.

ב. באյור שלහלן מתואר גרף הפונקציה  $f(x)$  והישר  $y = 0.1x$ .

חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, הישר, ציר ה- $y$  והאנך  $x = 2$ .



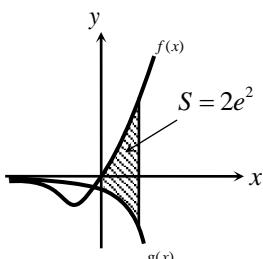
37) באյור שלහלן מתוארים גרפים של שלוש פונקציות:

$$h(x) = 2^{4-2x}, \quad g(x) = 4^x, \quad f(x) = 2^x \cdot 3$$

א. קבעו איזה גרף מתאר כל פונקציה.

ב. מצאו את שיעורי הנקודות A, B ו-C (נקודות החיתוך בין הגрафים).

ג. חשבו את השטח המסומן באյור.



38) ענו על הסעיפים הבאים:

א. גוזרו את הפונקציה  $y = e^x(x-1)$ .

ב. באյור שלහלן מתוארים גרפים של הפונקציות  $f(x) = xe^x$  ו- $g(x) = -e^x$ .

נעביר ישר  $y = a$ , כאשר  $a > 0$ , החותך את הגרפים של שתי הפונקציות ויוצר את השטח הכלוא בין הגרפים של שניהם, ציר ה- $y$  והישר (מקומו).

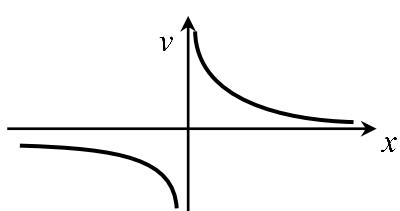
ידוע כי שטח זה שווה ל- $2e^2$ .

מצאו את  $a$ .

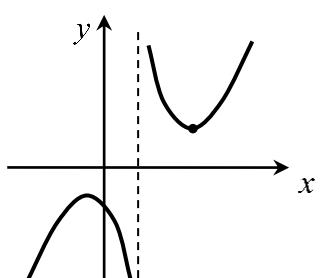
## פונקציות לוגריתמיות

### אינטגרלים מיידים של פונקציות לוגריתמיות

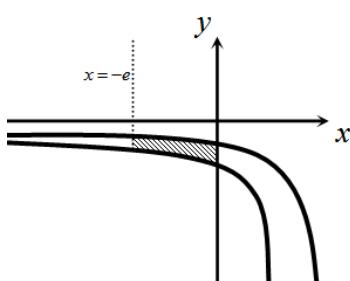
אינטגרל יסודי	אינטגרל של פונקציה מורכבת
$\int \frac{1}{x} dx = \ln x  + c$	$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln ax+b  + c$



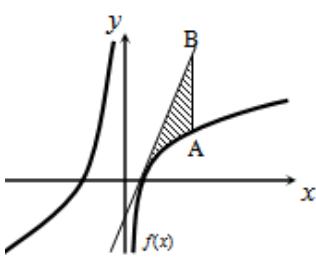
39) נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{1}{x}$ .  
 חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, הישרים  $x = -4$  ו- $x = -1$ , וציר ה- $x$ .  
 ניתן להשאיר  $\ln$  בתשובה.



40) נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$ .  
 חשבו את גודל השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המשיק לפונקציה בנקודת שבה  $x = 2$ , ואנך לציר ה- $x$  העובר בנקודת המינימום שלה.  
 אפשר להשאיר ביטוי עם  $\ln$  בתשובה.



41) באIOR שלහן נתונות הפונקציות  $f(x) = \frac{a}{x-1}$  ו- $g(x) = \frac{a-1}{x-2}$ , בתחום  $x < 0$ .  
 ידוע כי הגרפים של הפונקציות נחתכים בנקודת שבה  $x = 3$ .  
 א. מצאו את  $a$  וכתבו את שתי הפונקציות.  
 ב. חשבו את השטח המוגבל ע"י הגרפים של שתי הפונקציות, ציר ה- $y$  והישר  $x = -e$ .



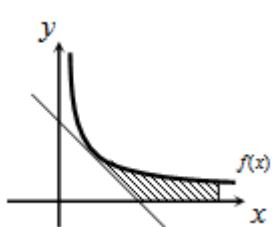
42) נתונה הפונקציה  $f(x) = 7 + ax + \frac{b}{x}$ .

ידוע כי משווהת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה החיתוך שלה עם ציר ה- $x$  היא  $y = 18x - 9$ .  
א. מצאו את  $a$  ו-  $b$  וכתבו את הפונקציה.

נעביר ישר המקביל לציר ה- $y$ , שחותך את גרף הפונקציה בנקודה A, ואת משווהת המשיק בנקודה B. אורך הקטע AB הוא 18.

ב. מצאו את משווהת הישר הנ"ל, אם ידוע כי הנקודה A נמצאת מימין לנקודה החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$ .

ג. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, המשיק והישר.

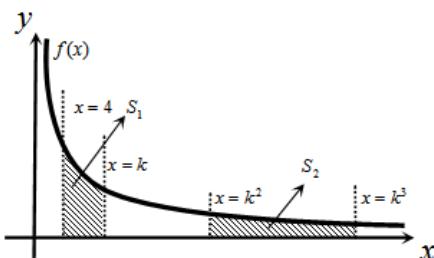


43) נגזרת הפונקציה  $f(x)$  היא  $f'(x) = -\frac{4}{x^2}$ .

משווהת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבת  $x = 2$  היא  $y = 4 - x$ .  
א. מצאו את  $f(x)$ .

ב. באյור שללן מתוארים גרף הפונקציה  $f(x)$  ומשיק, בתחום  $x > 0$ .

חסבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, המשיק, ציר ה- $x$  והישר  $x = e^2$ .



44) באյור שללן נתונה הפונקציה

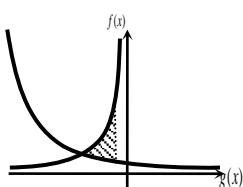
$$f(x) = \frac{2}{x}, \text{ בתחום } x > 0.$$

נעביר את הישירים  $x = k$ ,  $x = k^2$ ,  $x = k^3$  ו-  $x = 4$ , כמתואר באյור ( $x > 4$ ).

א. הבינו באמצעות  $k$  את השטחים  $S_1$  ו-  $S_2$ .

ב. הראו כי ההפרש  $S_2 - S_1$  אינו תלוי ב- $k$ , וחסבו את ערכו.

ג. נתון כי השטח  $S_2$  גדול פי 3 מהשטח  $S_1$ .  
מצאו את  $k$ .

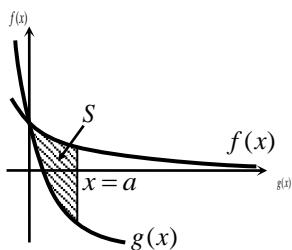


45) נתונות הפונקציות  $g(x) = \frac{k}{2x+5}$  ו-  $f(x) = -\frac{4}{x}$

גרף  $(x) g$  חותך את ציר ה- $y$  בנקודה שבת 4.  
א. מצאו את הפונקציה  $(x) g$ .

ב. מצאו את נקודות החיתוך של שני הגרפים.

ג. חשבו את השטח המוגבל ע"י שני הגרפים והישר  $x = -1$ .



46) באյור שלහלן מתוארים גרפים של הפונקציות

$$g(x) = \ln(e^{-2x} + e^{-3x}) \quad f(x) = \ln(e^{-x} + 1)$$

בתחום  $x \geq 0$ .

א. הראו כי הגרפים נחתכים על ציר ה- $y$ .

ב. נعتبر ישר  $x = a$  ( $a > 1$ ), המאונך

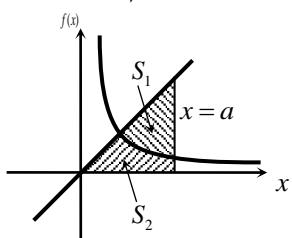
לציר ה- $x$ , חותך את הגרפים של שתי

הfonקציות ויוצר את השטח  $S$  (ראה איור).

מצאו את ערכו של  $a$ , עבורו מתקיים  $S = 4$ .

47) באյור שלහלן מתוארים גרפים של הפונקציה  $f(x) = \frac{2}{3x-1}$  והישר  $x = a$ .

א. מצאו את נקודת החיתוך של הפונקציה והישר, בריבוע הראשוני.



נعتبر אנכ' לציר ה- $x$ ,  $x = a$ , הנמצא מימין

לנקודת החיתוך שמצויה בסעיף הקודם.

האנ' חותך את הגרפים ויוצר את השטחים

$S_1$  ו-  $S_2$ , המתוארים באյור.

ב. מצאו את הערך של  $a$ , עבורו השטח  $S_2$

$$\text{יהיה שווה ל- } \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \ln 7$$

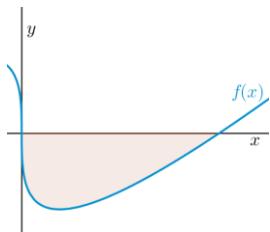
ג. עבור ערך ה- $a$  שנמצא בסעיף הקודם, חשבו את יחס השטחים  $\frac{S_1}{S_2}$ .

## פונקציית חזקה עם מעיריך רצionarioלי

### אינטגרלים מיידים של פונקציית חזקה עם מעיריך רצionarioלי

אינטגרל יסודי	אינטגרל של פונקציה מורכבת
$\int \sqrt[n]{x^m} dx = \int x^{\frac{m}{n}} dx = \frac{x^{\frac{m+1}{n}}}{\frac{m+1}{n}} + C$	$\int \sqrt[n]{(ax+b)^m} dx = \int (ax+b)^{\frac{m}{n}} dx = \frac{(ax+b)^{\frac{m+1}{n}}}{a \cdot \left(\frac{m}{n}+1\right)} + C$

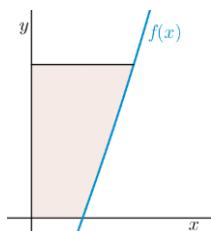
תנאי לקיום האינטגרציה  $\frac{m}{n} \neq -1$ .



. 48) באIOR שלහלן מופיע גרף הפונקציה  $f(x) = x - 4\sqrt[3]{x}$

א. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-  $x$ .

ב. חשבו את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה והציר.



. 49) באIOR שלහלן מופיע גרף הפונקציה  $f(x) = \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x}}$

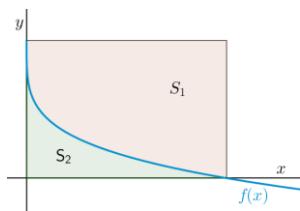
א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ב. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-  $x$ .

ג. נעביר אנך לציר ה-  $y$  מנקודה (4,6).

חשבו את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה, האנך והציר,

בריבוע הראשוני.

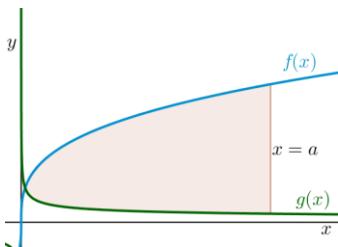


. 50) באIOR שלහלן מתואר גרף הפונקציה  $f(x) = 2 - \sqrt[4]{x}$

נעביר אנכים לצירים מנוקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים, כך שנוצר מלבדו,

ונסמן את השטח שבין גרף הפונקציה והציר  $x$ - ב-  $S_1$ , ואת השטח שבין גרף הפונקציה והציר  $y$ - ב-  $S_2$ .

מצאו את היחס  $\frac{S_1}{S_2}$ .



51) באյור שלහלן מתוארים גרפים של הפונקציות

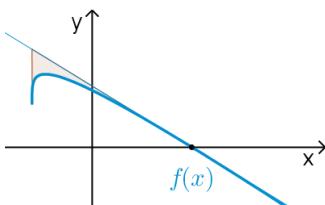
$$\cdot g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \text{ ו- } f(x) = 4\sqrt[3]{x}$$

א. מצאו את נקודת החיתוך של הגרפים בתחום  $x > 0$ .

ב. נعتبر אנך לציר ה- $x$ ,  $x = a$  ( $a$  פרמטר). ידוע כי השטח שנוצר בין שני הגרפים, מנוקדת החיתוך שלהם ועד לאנך,

$$\text{הוא } 42 \frac{3}{16} \text{ יח"ש.}$$

מצאו את  $a$ .



52) נתונה הפונקציה  $f(x) = \sqrt[4]{5x+6} - ax$ ,  $a$  פרמטר.

ידוע כי גраф הפונקציה חותך את ציר ה- $x$  בנקודת שבה  $x = 2$ .

א. מצאו את הפרמטר  $a$  וכתבו את הפונקציה.

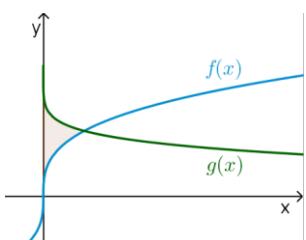
ב. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ג. מצאו את נקודת הקיצון בקצה של הפונקציה.

ד. מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה, העובר דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $x$ .

ה. באյור שלහלן מתואר גраф הפונקציה  $f(x)$  והמשיק שמצאנו בסעיף הקודם. נוריד אנך מהמשיק אל נקודת הקיצון בקצה של הפונקציה שמצאנו בסעיף ג'.

חשבו את השטח הנוצר בין גраф הפונקציה  $f(x)$  והמשיק.

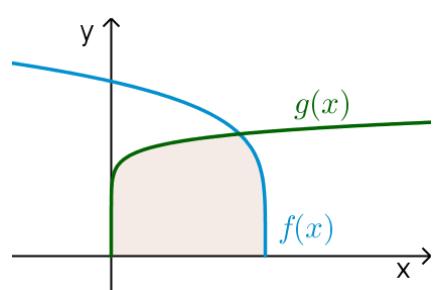


53) באյור שלහלן נתונים גרפים של הפונקציות

$$\cdot f(x) = 2 - \sqrt[6]{x} \text{ ו- } g(x) = \sqrt[3]{x}$$

א. מצאו את נקודת החיתוך של הגרפים.

ב. חשבו את השטח הכלוא בין שני הגרפים וציר ה- $y$ .

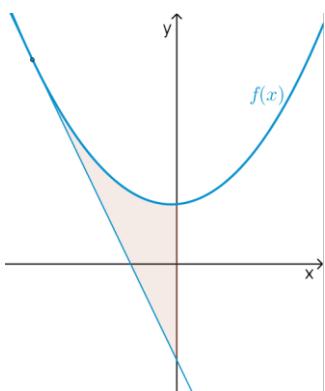


54) הנזורה של  $f(x)$  היא  $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt[5]{(6-5x)^4}}$

ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- $x$  בנקודת שבה  $x = 1.2$ .

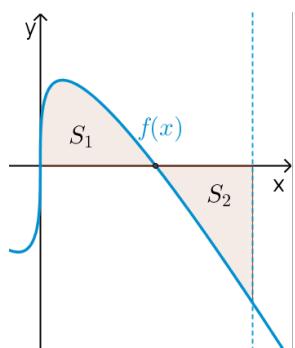
א. מצאו את  $f(x)$ .

ב. חשבו את השטח הכלוא בין גראף הפונקציה  $f(x)$ , גראף הפונקציה  $g(x) = \sqrt[10]{x}$  וציר ה- $x$ .



55) נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{3}{\sqrt[3]{5-x}} + \frac{1}{2}x^2$ .

- מצאו את משועצת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה  $x = -3$ .
- חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה  $f(x)$ , המשיק וציר ה- $y$ .



56) נתונה הפונקציה  $f(x) = \sqrt[3]{x} - 4x$ .

- מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
- מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$ .
- באזור שלhalten מתוואר גраф הפונקציה בריבוע הראשון. השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה- $x$  יסומן ב- $S$ .  
נעביר ישר  $k = x$ , אשר יוצר את השטח  $S_2$ , כמתואר באיזור.  
מצאו את  $k$ , אם ידוע כי  $S_1 = S_2$ .

## תשובות סופיות

.ג.  $57\frac{1}{6}$  יחס'ש. (1)

.ב.  $21\frac{1}{3}$  יחס'ש. (2)

.ב. שאלת הוכחה.  $g(x) = \Pi, f(x) = I$ . א. (3)

.ב.  $\frac{2}{3}$  יחס'ש. (4)

.ג.  $7\frac{5}{6}$  יחס'ש. ב.  $(-3,3)$  ב.  $y = -x$ . א. (5)

.ג.  $\frac{2}{3}$  יחס'ש. ב.  $(1,0)$  ב.  $y = -4x + 4$ . א. (6)

.ג.  $81\frac{1}{3}$  יחס'ש. ב.  $(1,9)$  ב.  $k = 10$ . א. (7)

.ב.  $27\frac{1}{6}$  יחס'ש.  $f(x) = -x^2 + 3x + 10$ . א. (8)

.ב.  $5\frac{1}{3}$  יחס'ש.  $g(x) = (x-4)^2$ . א. (9)

.ג.  $85\frac{1}{3}$  יחס'ש. ב.  $(0,0)$  ב.  $f(x) = x^2 - 6x$ . א. (10)

.ב.  $\frac{1}{8}$  יחס'ש.  $y = -x + 2$ . א. (11)

.ב. 1 יחס'ש. (12)

.ב.  $13\frac{1}{3}$  יחס'ש.  $(2,8), a = 32$ . א. (13)

.ב. 8 יחס'ש.  $f(x) = \frac{36-x^2}{x^2}, a = 36$ . א. (14)

.ה.  $\frac{5}{8}$  .ג.  $\left(-1.5, \frac{2}{3}\right)$  .ד.  $y = -\frac{1}{9}x + \frac{1}{6}$  .ב.  $A = 6$ . א. (15)

.ב. 1.75 יחס'ש.  $\min(0.5, 1.5)$ . א. (16)

.ב. 48 יחס'ש.  $(4,8)$ . א. (17)

.ב. 2.26 יחס'ש. (18)

.ב. 0.5 יחס'ש. (19)

$t = 16$  (20)

.ג. 88 יחס'ש.  $f'(x) = 1 + \frac{4}{x\sqrt{x}} > 0$  .iii  $(4,0)$  .ii  $x > 0$  .i. א. (21)

$b = 2$  (22)

$a = 9$  (23)

(24) א. שאלת הוכחה.  $t = 1$  ב.

$S_2 = |-S_1| = 2 \cdot ii \quad S_1 = 2 \cdot i \cdot i \quad (5,0) \quad a = 13 \quad \text{ב. } (25)$

(26) ב. 10 יחס'.

(27) א. חיובית:  $x < 5$ , שלילית:  $x > 5$ . ב. עולה:  $x < 5$ , יורדת:  $x > 5$ .

ד. שאלת הוכחה. ח. 10 יחס'.

$\min(5, -2)$

(28) א. לא. הנקודה  $(3,0)$  היא פיתול, מכיוון שהפונקציה עולה לפניה ואחריה.

ב. שאלת הוכחה.

ג. 9 יחס'.

ב. 1 יחס'.

f(x): II, f'(x): I (29)

ג. 604.8 יחס'.

(30) א. שאלת הוכחה.

ב. 9.6 יחס'.

ג. 9.6 יחס'.

S = 0.192 (31)

b = 2 (32)

(33) שאלת הוכחה.

a = ln 2 (34)

ג. S = 4.744 יחס'.

ב. 1.52  $f(x) = \frac{e^x + e^{-2x}}{4}$ , a = -2 . א (36)

ג. S = 1.03 A(1,4), B(1  $\frac{1}{3}$ , 2.52), C(0,1) ב (37)

א. a = 2 ב. y' = xe^x . נ (38)

. ש. S = ln 4 (39)

. ש. S = 4 ln 2 - 2 (40)

ב. S = 1.76 f(x) =  $\frac{2}{x-1}$ , g(x) =  $\frac{1}{x-2}$ , a = 2 . נ (41)

ב. x = 2 f(x) = 7 + 2x -  $\frac{4}{x}$ , a = 2 , b = -4 . נ (42)

ג. S = 6 + ln 256 ≈ 11.54 יחס'.

ב. S = 6 - 4 ln 2 f(x) =  $\frac{4}{x}$  . נ (43)

א. k = 8 ס. S\_2 - S\_1 = ln 16 ב. S\_1 = 2 ln k - ln 16 , S\_2 = 2 ln k . נ (44)

ג. S = ln 5  $\frac{1}{3}$  ≈ 1.674 ס. (-2, 2) ב. g(x) =  $\frac{2}{2x+5}$  . נ (45)

ב. a = 2 (46)

ג.  $\frac{S_1}{S_2} = 5.955$  ס. a = 5 ב. (1,1) . נ (47)

ב. S = 16 יחס'.

(0,0), (8,0) . א (48)

ג. S = 18.149 ס. (2,0) ב. x &gt; 0 . נ (49)

$$\frac{S_1}{S_2} = 4 \quad (50)$$

$$a=8 \quad \text{ב.} \quad \left( \frac{1}{8}, 2 \right) \quad \text{א.} \quad (51)$$

$$(-1.2, 1.2) \quad \text{ג.} \quad x \geq -1.2 \quad \text{ב.} \quad f(x) = \sqrt[4]{5x+6} - x, a=1 \quad \text{א.} \quad (52)$$

$$S = 4.56 \quad \text{ח.} \quad y = -\frac{27}{32}x + \frac{27}{16} \quad \text{ט.}$$

$$S = \frac{11}{28} \quad \text{ב.} \quad (1,1) \quad \text{א.} \quad (53)$$

$$S = 1\frac{5}{66} \quad \text{ב.} \quad f(x) = (6-5x)^{\frac{1}{5}} \quad \text{א.} \quad (54)$$

$$S = 4.56 \quad \text{ב.} \quad y = -2\frac{15}{16}x - \frac{45}{16} \quad \text{א.} \quad (55)$$

$$k = \left(\frac{3}{8}\right)^{1.5} = 0.2296... \quad \text{ג.} \quad (0,0), \left(\frac{1}{8}, 0\right), \left(-\frac{1}{8}, 0\right) \quad \text{ב.} \quad .x \quad \text{א. כל} \quad (56)$$

## чисוב שטחים ביחס לציר ה- $y$

### שאלות

1) חשבו את השטח הכלוא בין הפרבולה  $y^2 = -x$  והישר  $y = x + 6$ .

2) חשבו את השטח הכלוא בין הפרבולה  $x = y^2 + 2$  והישר  $x = 8 - y$ .

### תשובות סופיות

$$20\frac{5}{6} \quad (1)$$

$$20\frac{5}{6} \quad (2)$$

## אורקשת

### שאלות

חשבו את אורך העקום הנתון :

$$(1 \leq x \leq 8), \quad y = x^{2/3} \quad (2)$$

$$(1 \leq x \leq 2), \quad y = \frac{x^4}{8} + \frac{1}{4x^2} \quad (1)$$

$$(0 \leq x \leq 3), \quad y = \frac{2}{3}(1+x^2)^{3/2} \quad (4)$$

$$(1 \leq x \leq 2), \quad y = \frac{x^5}{15} + \frac{1}{4x^3} \quad (3)$$

$$(1 \leq x \leq 8), \quad x^{2/3} + y^{2/3} = 4 \quad (6)$$

$$(0 \leq x \leq 3), \quad y = \frac{1}{3}\sqrt{x}(3-x) \quad (5)$$

$$(1 \leq x \leq 2), \quad y = \ln x \quad (8)$$

$$(0 \leq y \leq 4), \quad x = 3y^{3/2} - 1 \quad (7)$$

$$(1 \leq x \leq 2), \quad y = x^2 \quad (9)$$

### תשובות סופיות

$$\frac{33}{16} \quad (1)$$

$$\frac{1}{9} \left\{ \frac{40^{1.5}}{3} - \frac{13^{1.5}}{3} \right\} \quad (2)$$

$$\frac{1097}{480} \quad (3)$$

$$21 \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} \left\{ 2\sqrt{3} + \frac{2}{3} 3^{1.5} \right\} \quad (5)$$

$$9 \quad (6)$$

$$\frac{8}{243} \left\{ 82^{1.5} - 1 \right\} \quad (7)$$

$$\left\{ \sqrt{5} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} \right| \right\} - \left\{ \sqrt{2} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \right| \right\} \quad (8)$$

$$\sqrt{17} - \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4} \ln(\sqrt{17} + 4) - \frac{1}{4} \ln(\sqrt{5} + 2) \quad (\text{Decimal: } 3.16784) \quad (9)$$

## חדוֹא לכלכלהים

פרק 16 - פתרוןzman 11 לדוגמה

תוכן העניינים

1. כללי .....

(ללא ספר) .....

## חדוֹא לכלכלהים

פרק 17 - פתרון ממן 12 לדוגמה

תוכן העניינים

1. כללי .....

(ללא ספר) .....

## חדוֹא לכלכלהים

פרק 18 - פתרוןzman 13 לדוגמה

תוכן העניינים

1. כללי .....

(ללא ספר) .....

## חדוֹא לכלכלהים

פרק 19 - פתרוןzman 14 לדוגמה

תוכן העניינים

1. כללי .....

(ללא ספר) .....

## חדוֹא לכלכלהים

פרק 20 - פתרוןzman 15 לדוגמה

תוכן העניינים

1. כללי .....

(ללא ספר) .....

## חדו"א לכלכליים

פרק 21 - חדו"א לכלכליים - פתרון מלא לדוגמה מתרגיל 6.9.07

תוכן העניינים

1. כללי .....

(ללא ספר) .....

## חדו"א לכלכליים

פרק 22 - חדו"א לכלכליים - פתרון מלא לדוגמה מתאריך 19.11.07

תוכן העניינים

1. כללי .....

(ללא ספר) .....

## חדו"א לכלכלהים

פרק 23 - חדו"א לכלכלהים - פתרון שאלות אמריקאיות מבחינות סמסטר א  
07

### תוכן העניינים

1. כללי .....

(ללא ספר) .....

## חדו"א לכלכלהים

פרק 24 - חדו"א לכלכלהים - פתרון שאלות אמריקאיות מבחינות סמסטר ב  
07

### תוכן העניינים

1. כללי .....

(ללא ספר) .....

## חדו"א לכלכלהים

פרק 25 - חדו"א לכלכלהים - פתרון שאלות אמריקאיות מבחינות ג 07 ו-א  
08

### תוכן העניינים

1. כללי .....

(ללא ספר) .....